Mit eLearning #besser lernen

Giancoli Physik

Gymnasiale Oberstufe

Pearson

Zugangscode

Falls Sie beim Kauf Ihres eBooks keinen Zugangscode erhalten haben, kontaktieren Sie uns bitte über die folgende Seite und halten Sie Ihre Rechnung/Bestellbestätigung bereit:
https://www.pearson.de/ebook-zugangscode

Argument der Sinusfunktion dasselbe sein wie zum Zeitpunkt $t = 0$, also ersetzen wir x in Gleichung 10.6 durch $(x - vt)$:

Eindimensionale Wellengleichung

$$D(x,t) = D_M \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] . \tag{10.7a}$$

Anders gesagt, wenn Sie auf einem Wellenberg reiten, bleibt das Argument der Sinusfunktion $(2\pi/\lambda)(x - vt)$ gleich ($= \pi/2, 5\pi/2$ usw.). Wenn t wächst, muss x ebenfalls wachsen, damit $(x - vt)$ konstant bleibt.

Sinusförmige Wellen bezeichnen wir auch als *harmonische Wellen*. Gleichung 10.7a ist die mathematische Darstellung einer sinusförmigen Welle, die sich entlang der x-Achse nach rechts (x wächst) bewegt. Sie liefert die Auslenkung $D(x,t)$ der Welle an jedem beliebigen Punkt x zu jeder beliebigen Zeit t. Die Funktion $D(x,t)$ beschreibt eine Kurve, die die tatsächliche Wellenform im Raum zum Zeitpunkt t darstellt. Mit $v = \lambda f$ (Gleichung 10.1) können wir Gleichung 10.7a in andere Formen bringen, die oft vorteilhafter sind:

$$D(x,t) = D_M \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right) = D_M \sin 2\pi(x/\lambda - t/T) . \tag{10.7b}$$

Darin ist $T = 1/f = \lambda/v$ die Periode. In der Form

$$D(x,t) = D_M \sin(kx - \omega t) \tag{10.7c}$$

ist $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ die Winkelgeschwindigkeit und

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.8}$$

die Wellenzahl. Alle drei Formen, Gleichungen 10.7a, 10.7b und 10.7c sind gleichwertig. Gleichung 10.7c ist am einfachsten zu schreiben und möglicherweise die allgemeinste. Die Größe $(kx - \omega t)$ und ihre Äquivalente in den anderen beiden Gleichungen sind die **Phasen** einer Welle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v wird Phasengeschwindigkeit genannt, da sie die Geschwindigkeit einer festen Phase (oder Form) der Welle beschreibt. Sie kann mit ω und k ausgedrückt werden als

$$v = \lambda f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k} . \tag{10.9}$$

Für eine Welle, die sich in negativer x-Richtung bewegt (abnehmende x-Werte), ersetzen wir in der Wellengleichung einfach v durch $-v$.

Wir wollen noch einen Blick auf Gleichung 10.7c werfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben wir

$$D(x,0) = D_M \sin kx ,$$

als Startwert unserer sinusförmigen Wellenform. Schauen wir uns die Wellenform im Raum zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt t_1 an, so erhalten wir

$$D(x,t_1) = D_M \sin(kx \pm \omega t_1) .$$

Das bedeutet, wenn wir ein Bild der Welle zum Zeitpunkt $t = t_1$ schießen, würden wir eine Sinuswelle mit der Phasenverschiebung ωt_1 sehen. Für einen festen Wert $t = t_1$ hat die Welle folglich eine Sinusform im Raum. Sehen wir uns andererseits einen festliegenden Ort an, etwa $x = 0$, können wir das Zeitverhalten der Welle studieren:

$$D(0,t) = D_M \sin -\omega t .$$

Dabei haben wir Gleichung 10.7c benutzt. Das ist (bis auf das negative Vorzeichen) die uns aus Abschnitt 9.2 (Gleichung 9.4) bekannte Gleichung für die harmonische Schwingung. Für jeden anderen festen x-Wert wie $x = x_1$ gilt $D = D_M \sin(kx_1 - \omega t)$, was sich nur durch die konstante Phasenverschiebung kx_1 unterscheidet. Folglich verhält sich die Auslenkung in der Zeit exakt wie eine harmonische Schwingung. Die Gleichungen 10.7a bis c kombinieren diese Aspekte und geben uns die Darstellung einer **bewegten Sinuswelle**.

10.5 Das Superpositionsprinzip

Wenn zwei oder mehr Wellen zum selben Zeitpunkt denselben Ort passieren, ist für viele Wellen die tatsächliche Auslenkung die algebraische oder Vektorsumme der einzelnen Auslenkungen. Das nennt man das **Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip)**. Es gilt für mechanische Wellen, solange die Auslenkungen nicht zu groß werden und es eine lineare Beziehung zwischen den Auslenkungen und den elastischen beziehungsweise rücktreibenden Kräften des Mediums gibt.[3] Ist beispielsweise die Amplitude einer mechanischen Welle so groß, dass sie den elastischen Bereich des Mediums überschreitet und demnach das Hooke'sche Gesetz nicht mehr gilt, so ist das Superpositionsprinzip nicht mehr genau erfüllt.[4] Wir werden uns jedoch größtenteils mit Systemen beschäftigen, in denen wir die Gültigkeit des Superpositionsprinzips voraussetzen dürfen.

Ein Ergebnis des Superpositionsprinzips ist, dass wenn zwei Wellen denselben Raumbereich passieren, sie ihre Bewegung unabhängig voneinander fortsetzen. Vielleicht ist Ihnen zum Beispiel schon einmal aufgefallen, dass Wellen auf einer Wasseroberfläche (zweidimensionale Wellen), die aufeinander zulaufen, nach der „Begegnung" unverändert ihren Weg fortsetzen, als liefen sie durch die jeweils andere Welle hindurch (▸ Abbildung 10.20).

▸ Abbildung 10.13 gibt ein Beispiel für das Superpositionsprinzip: Drei Wellen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz laufen über ein gespanntes Seil. Zu jedem Zeitpunkt, wie im in der Abbildung gezeigten Moment, ist die tatsächliche Amplitude an einer beliebigen Stelle x die Summe der Amplituden der drei Wellen an der Stelle. Die resultierende Welle ist keine einfache sinusförmige Welle, sie heißt die *zusammengesetzte Welle*.

Es kann gezeigt werden, dass jede zusammengesetzte Welle als Überlagerung vieler einfacher sinusförmiger Wellen unterschiedlicher Amplituden, Frequenzen und Wellenlängen aufgefasst werden kann. Das nennt man *Fourier'sches Gesetz*, den Vorgang des Zusammensetzens *Fourier-Synthese*. Eine komplexe periodische Welle der Periode T lässt sich darstellen als Summe reiner kosinus- und sinusförmiger Terme, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache von $f = 1/T$ sind. Ist die Welle nicht periodisch, wird aus der Summe ein Integral (*Fourier-Integral*). Obgleich wir hier nicht ins Detail gehen wollen, sehen wir doch die Wichtigkeit sinusförmiger Wellen und der einfachen har-

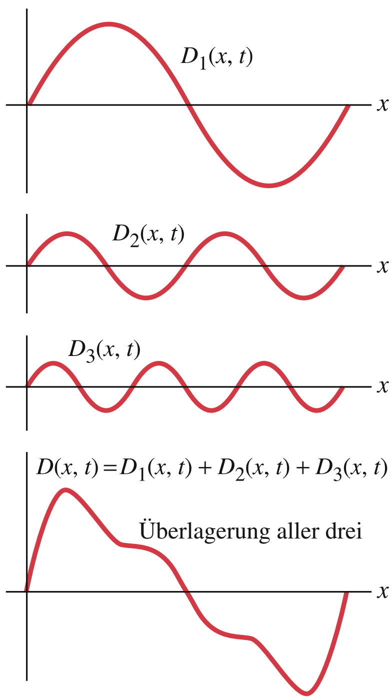


Abbildung 10.13 Das Superpositionsprinzip für eine eindimensionale Welle: eine aus drei sinusförmigen Wellen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz zusammengesetzte Welle ($f_0, 2f_0, 3f_0$) zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die zusammengesetzte Welle ist an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt die algebraische Summe der Amplituden seiner Teilwellen. Die Amplituden sind vergrößert dargestellt; damit das Superpositionsprinzip gültig ist, müssen sie klein im Vergleich mit den Wellenlängen sein.

3 Für elektromagnetische Wellen im Vakuum (Kapitel 21) gilt das Superpositionsprinzip immer.

4 Verzerrung ist im High-Fidelity-Bereich ein Beispiel, wo das Superpositionsprinzip nicht gilt: Zwei Frequenzen lassen sich in der Elektronik nicht linear kombinieren.

monischen Bewegung: Jede Wellenform lässt sich als Summe von kosinus- und sinusförmigen Wellen auffassen.

Beispiel 10.2 **Synthese einer Rechteck-Welle**

Drei Wellen mit $D_1 = D_M \cos kx$, $D_2 = 1/3 D_M \cos 3kx$ und $D_3 = 1/5 D_M \cdot \cos 5kx$ sind zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Dabei sind $D_M = 1{,}0\,\text{m}$ und $k = 10\,\text{m}^{-1}$. Zeichnen Sie die Summe der drei Wellen von $x = -0{,}4\,\text{m}$ bis $+0{,}4\,\text{m}$. (Diese drei Wellen sind die ersten drei Fourier-Komponenten einer Rechteck-Welle.)

Lösung

Die erste Welle, D_1, hat eine Amplitude von 1,0 m und eine Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/10\,\text{m} = 0{,}628\,\text{m}$. Die zweite Welle, D_2, hat eine Amplitude von 0,33 m und eine Wellenlänge $\lambda = 2\pi/3k = 2\pi/30\,\text{m} = 0{,}209\,\text{m}$. Die dritte Welle, D_3, hat eine Amplitude von 0,20 m und eine Wellenlänge von $\lambda = 2\pi/5k = 2\pi/50\,\text{m} = 0{,}126\,\text{m}$. Alle drei Wellen und ihre Summe sind in ▸ Abbildung 10.14 dargestellt. Die Summe beginnt einem Rechteckpuls zu ähneln (blaue Kurve).

ANGEWANDTE PHYSIK

Rechteck-Welle

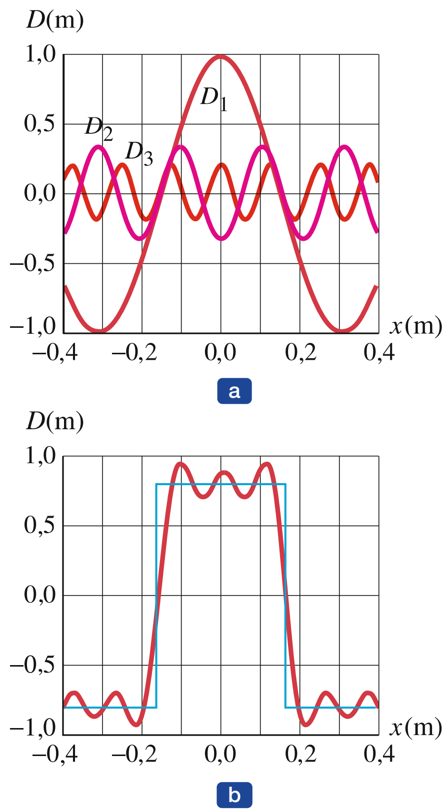


Abbildung 10.14 Beispiel 10.2. Synthese einer Rechteck-Welle.

Wenn die rücktreibende (elastische) Kraft in einigen kontinuierlichen Medien für mechanische Wellen nicht exakt proportional zur Auslenkung ist, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz ab.

Die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz nennt man **Dispersion**[5]. Die unterschiedlichen sinusförmigen Wellen, die eine zusammengesetzte Welle bilden, bewegen sich dann mit leicht unterschiedlicher Geschwindigkeit. Folglich wird die zusammengesetzte Welle ihre Form in dispersiven Medien ändern. Eine reine Sinuswelle behält zwar ihre Form auch in dispersiven Medien, Reibung und Streuung verändern jedoch auch die Wellenfunktion einer rein harmonischen Welle. Gibt es keine Dispersion und keine Reibung, so wird auch eine zusammengesetzte lineare Welle ihre Form nicht ändern.

10.6 Reflexion und Transmission

Wenn eine Welle auf ein Hindernis trifft oder das Ende ihres Ausbreitungsmediums erreicht, wird zumindest ein Teil der Welle reflektiert. Wahrscheinlich haben Sie schon einmal gesehen, wie Wasserwellen von einem Felsen oder vom Rand eines Schwimmbeckens reflektiert werden. Und ganz sicher haben Sie schon mal gehört, wie eine Schallwelle zurückgeworfen wird – das nennen wir dann „Echo".

Ein Wellenpaket, das ein Seil entlang läuft, wird wie in ▸ Abbildung 10.15 gezeigt reflektiert. Sie können das selbst mit einem auf dem Tisch liegenden Seil ausprobieren und prüfen, ob das reflektierte Paket invertiert wird

5 Dieser Effekt lässt sich an einem (optischen) Prisma beobachten.

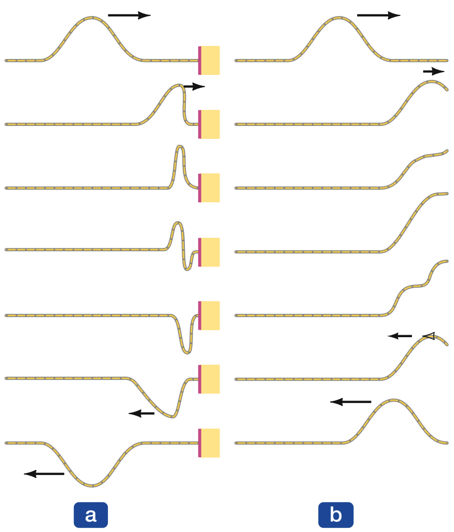


Abbildung 10.15 Reflexion eines Wellenpakets auf einem Seil, wenn das Seilende (a) fest und (b) lose ist.

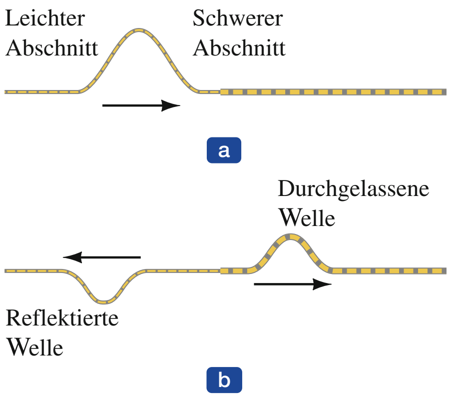


Abbildung 10.16 Läuft ein Wellenpaket in eine Diskontinuität (a), wird ein Teil reflektiert, und ein Teil wird durchgelassen (b).

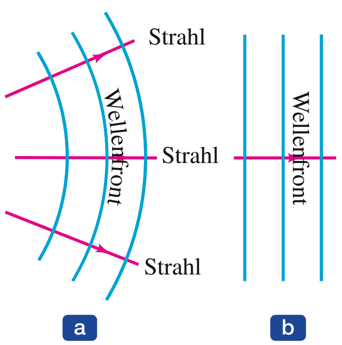


Abbildung 10.17 Strahlen, die die Ausbreitungsrichtung angeben, stehen stets senkrecht zu den Wellenfronten (Wellenberg). (a) Kreis- oder Kugelwellen nahe der Quelle. (b) Weit entfernt von der Quelle sind die Wellenfronten nahezu eben und heißen daher ebene Wellen.

wie in Abbildung 10.15a, wenn das andere Seilende eingespannt ist, oder bei losem Ende aufrecht zurückläuft (Abbildung 10.15b). Im Fall des eingespannten Seils übt das Wellenpaket eine aufwärtsgerichtete Kraft auf die Befestigung aus. Diese übt eine gleich große, jedoch entgegengerichtete Kraft (drittes Newton'sches Axiom) abwärts auf das Seil aus. Diese abwärtsgerichtete Kraft erzeugt das invertierte reflektierte Paket. Das reflektierte Paket hat eine Phasenverschiebung von 180° erfahren, als ob die Phase um $\frac{1}{2}\lambda$ oder 180° verschoben wäre. Ein Wellenberg wird zu einem Wellental und umgekehrt. In Abbildung 10.15b ist das freie Ende weder durch eine Befestigung noch durch zusätzliches Seil eingeschränkt. Es wird daher überschwingen – seine Auslenkung ist zeitweise größer als die des Wellenpakets. Das überschwingende Ende übt eine aufwärtsgerichtete Zugkraft auf das Seil aus, die das reflektierte Paket erzeugt. Folglich wird der Wellenberg nicht invertiert (keine Phasenverschiebung).

Wenn das Wellenpaket aus Abbildung 10.15a die Wand erreicht, wird nicht die gesamte Energie reflektiert. Ein Teil wird von der Wand absorbiert. Ein Teil der absorbierten Energie wird in Wärme umgewandelt, ein weiterer Teil wandert weiter durch die Wand. Man kann Reflexion und Transmission besser anhand eines Wellenpakets illustrieren, das durch ein Seil läuft, das aus einem leichten und einem schweren Abschnitt besteht (▸ Abbildung 10.16). Wenn die Welle die Grenze zwischen den beiden Seilabschnitten erreicht, wird ein Teil des Pakets reflektiert, ein anderer läuft, wie dargestellt, weiter. Je schwerer der zweite Abschnitt ist, desto geringer ist die Amplitude des transmittierten (durchgehenden) Wellenpakets. Wenn der zweite Abschnitt eine Wand oder ein Haken ist, wird nur sehr wenig durchgelassen. Bei einer periodischen Welle verändert sich die Frequenz nicht durch die Grenze, da der Grenzpunkt mit eben dieser Frequenz schwingt. Hat folglich die transmittierte Welle eine niedrigere Geschwindigkeit, ist auch ihre Wellenlänge kleiner ($\lambda = v/f$).

Bei zwei- oder dreidimensionalen Wellen wie Wasserwellen haben wir es mit einer **Wellenfront** zu tun, worunter wir sämtliche Punkte, die den Wellenberg bilden, verstehen (also das, was wir als Welle bezeichnen). Die Ausbreitungsrichtung der Welle wird durch einen Strahl verdeutlicht (▸ Abbildungen 10.17 und 10.18), der senkrecht auf der Wellenfront steht. Beachten Sie, dass in Abbildung 10.17b die Wellenfronten in großer Entfernung von ihrer Quelle nahezu ihre gesamte Krümmung verloren haben und fast gerade sind, wie das bei Meereswellen oft der Fall ist. Man nennt sie **ebene Wellen**.

Bei der Reflexion einer zwei- oder dreidimensionalen Welle (Abbildung 10.18) ist der Winkel, den die *einfallende Welle* mit der reflektierenden Oberfläche bildet, gleich dem Winkel der reflektierten Welle mit der Oberfläche. Das ist das **Reflexionsgesetz: Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel (Ausfallswinkel)**. Der Einfallswinkel ist definiert als der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Lot auf der reflektierenden Oberfläche bildet (oder den die Wellenfront mit einer Oberflächentangente bildet). Der Reflexionswinkel ist der entsprechende Winkel der reflektierten Welle.[6]

6 Die exakte Herleitung dieses Gesetzes im Rahmen der Wellentheorie erfordert die Kenntnis des Huygens-Prinzips, vgl. Kapitel 22.

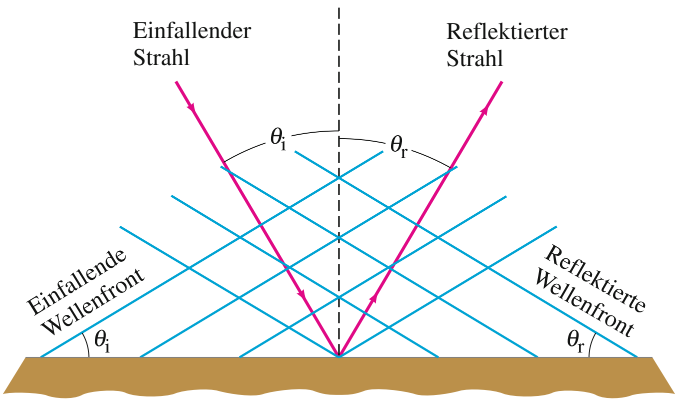


Abbildung 10.18 Das Reflexionsgesetz.

10.7 Interferenz

Interferenz tritt auf, wenn zwei Wellen zum selben Zeitpunkt denselben Raum passieren. Interferenz von Wellen kann mit dem Superpositionsprinzip verstanden werden. Betrachten Sie zum Beispiel die beiden Wellenpakete auf einem Seil, die aufeinander zulaufen (► Abbildung 10.19). In Teil (a) haben die beiden Pakete die gleiche Amplitude, doch das eine ist ein Berg und das andere ein Tal. In Teil (b) sind beide Pakete Berge. In beiden Fällen treffen sich die Wellen und laufen durcheinander hindurch. Wenn sie jedoch überlappen, ist die resultierende Auslenkung *die algebraische Summe der Einzelauslenkungen* (Superpositionsprinzip). In Abbildung 10.19a sind die Amplituden entgegengerichtet, und das Resultat ist **destruktive (auslöschende) Interferenz**. Dagegen ist in Abbildung 10.19b die resultierende Auslenkung größer als jede der beiden einzelnen Auslenkungen, man spricht dann von **konstruktiver Interferenz**.

Wenn zwei Steine gleichzeitig in einen See geworfen werden, interferieren die beiden Kreiswellen miteinander (► Abbildung 10.20). In einigen dadurch erzeugten Bereichen treffen Berge der einen auf Berge der anderen (und Täler treffen auf Täler); das ist konstruktive Interferenz, wobei das Wasser mit größerer Amplitude auf- und abschwingt als bei den Einzelwellen. In

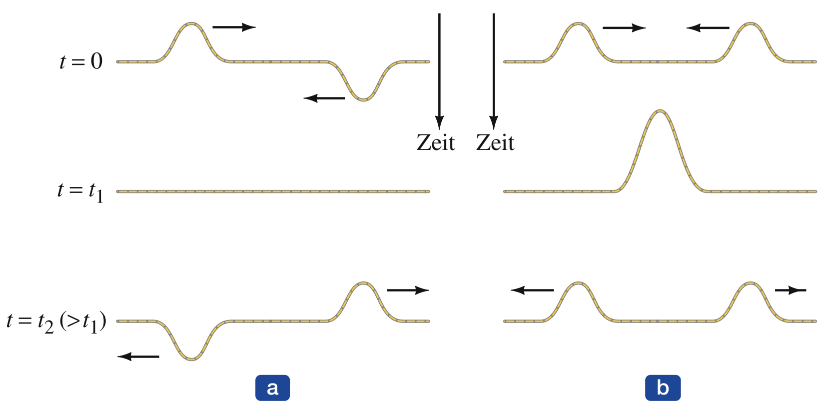
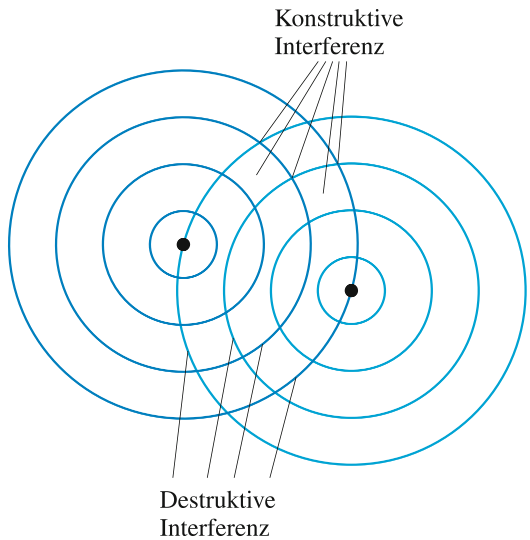


Abbildung 10.19 Zwei Wellenpakete laufen durcheinander hindurch. Wo sie sich treffen, tritt Interferenz auf: (a) destruktiv; (b) konstruktiv.

a



b

Abbildung 10.20 Interferenz von Wasserwellen. Konstruktive Interferenz tritt dort auf, wo das Wellenmaximum (Kamm) einer Welle auf das Maximum einer anderen trifft oder wo zwei Wellenminima (Täler) aufeinandertreffen. Destruktive Interferenz („flache Wasseroberfläche") ergibt sich dort, wo ein Wellenkamm der einen auf ein Wellenminimum (Tal) der anderen Welle stößt.

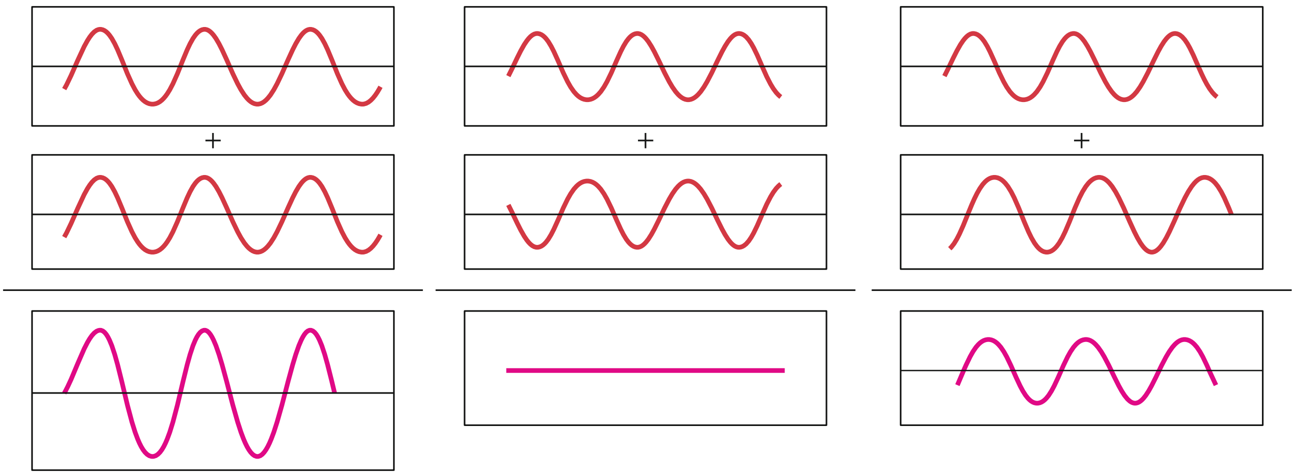


Abbildung 10.21 Zwei Wellen interferieren: (a) konstruktiv; (b) destruktiv; (c) teilweise destruktiv.

anderen Bereichen tritt destruktive Interferenz auf, wo sich das Wasser dann tatsächlich gar nicht bewegt – dort treffen Wellenberge und Wellentäler unterschiedlicher Quellen aufeinander. Im ersten Fall (konstruktive Interferenz) sind die beiden Wellen **in Phase**, wohingegen im Fall von destruktiver Interferenz die beiden Wellen **gegenphasig** und um eine halbe Wellenlänge oder 180° verschoben sind. Die relative Phase der beiden Wellen liegt in den meisten Bereichen zwischen diesen beiden Extremen, was teilweise Auslöschung zur Folge hat. Die drei Situationen sind in ▸ Abbildung 10.21 dargestellt. Dort sind die Amplituden an drei Orten gegen die Zeit aufgetragen.

Interferenz von Schall

Wir wollen nun die Interferenz bei Schallwellen genauer untersuchen. Als einfaches Beispiel betrachten wir zwei große Lautsprecher, A und B, die sich im Abstand *d* voneinander auf der Bühne eines Saales befinden (▶ Abbildung 10.22). Die beiden Lautsprecher senden Schallwellen derselben Frequenz aus, die in Phase miteinander sind: Wenn ein Lautsprecher ein Druckmaximum erzeugt, so auch der andere. (Reflexionen vom Boden und von den Wänden vernachlässigen wir.) Die Kreise in der Zeichnung stehen für die Wellenberge der Schallwellen von beiden Lautsprechern. Natürlich müssen wir uns daran erinnern, dass bei Schallwellen ein Berg Kompression bedeutet, während in einem Wellental – zwischen zwei Bergen – Expansion auftritt. Eine Person oder ein Detektor am Punkt C, der denselben Abstand von beiden Lautsprechern hat, wird einen lauten Klang hören, weil die Interferenz konstruktiv ist. An einem Punkt D hingegen wird wenig oder gar nichts zu hören sein wegen der dort auftretenden destruktiven Interferenz – Kompressionen der einen treffen auf Expansionen der anderen Welle und umgekehrt (siehe auch Abbildung 10.20 und die entsprechende Diskussion über Wasserwellen).

Die Analyse dieser Situation wird vielleicht klarer, wenn wir die Wellenformen grafisch wie in ▶ Abbildung 10.23 darstellen. In Abbildung 10.23a sieht man, dass am Punkt C konstruktive Interferenz auftritt, da beide Wellen gleichzeitig Berge oder gleichzeitig Täler haben. Abbildung 10.23b zeigt uns die Situation für Punkt D. Die Welle aus Lautsprecher B muss einen längeren Weg zurücklegen als die Welle von Lautsprecher A. Somit eilt die Welle aus B derjenigen aus A nach. In der Zeichnung ist der Punkt E so gewählt, dass die Distanz ED gleich der Distanz AD ist. Wir sehen, dass wenn der Abstand BE exakt einer halben Schallwellenlänge entspricht, die Wellen im Punkt D exakt gegenphasig sind und destruktive Interferenz auftritt. Das ist auch das Kriterium für die Bestimmung eines Punktes mit destruktiver Interferenz: Sie ereignet sich an jedem Punkt, dessen Abstand von dem einen Lautsprecher sich um exakt eine halbe Wellenlänge von seinem Abstand zum anderen Lautsprecher unterscheidet. Man beachte, dass wenn der zusätzliche Abstand (BE in Abbildung 10.23b) eine ganze Wellenlänge (oder 2,3,4 . . . ganze Wellenlängen) beträgt, die beiden Wellen gleichphasig sind und *konstruktive Interferenz* auftritt. Beträgt der Abstand BE $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ . . . Wellenlängen, ergibt sich *destruktive Interferenz*.

Es ist wichtig, sich klarzumachen, dass eine Person an Punkt *D* bei dieser bestimmten Frequenz absolut nichts hört, obgleich der Schall aus beiden Lautsprechern kommt. Wird einer der beiden Lautsprecher ausgeschaltet, wäre der Schall des anderen klar hörbar.

Wenn ein Lautsprecher ein ganzes Frequenzspektrum abstrahlt, so werden an einem gegebenen Punkt nur ganz bestimmte Frequenzen komplett destruktiv interferieren.

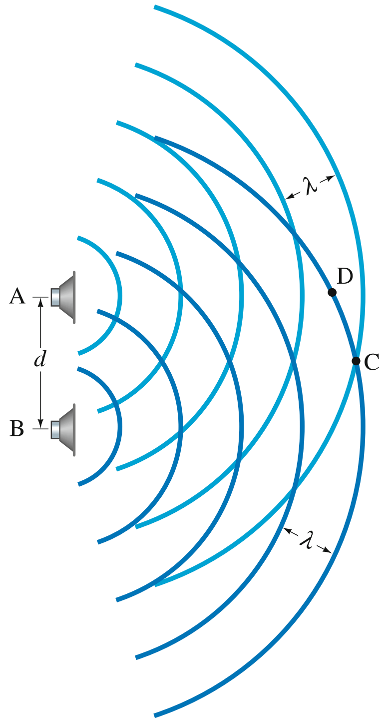


Abbildung 10.22 Schallwellen von zwei Lautsprechern interferieren.

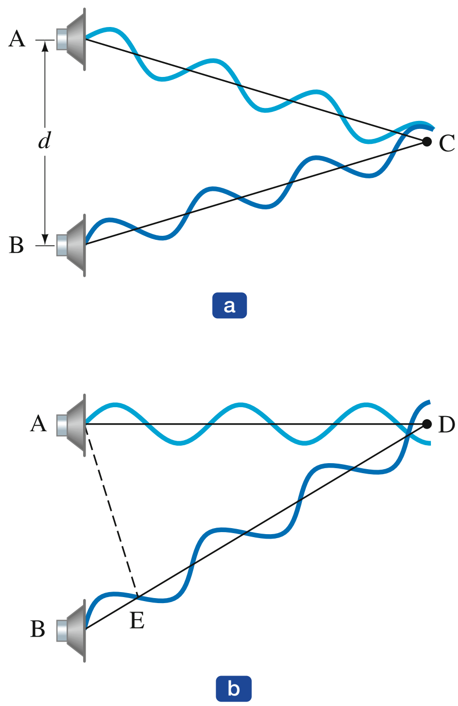


Abbildung 10.23 Die Wellen aus den zwei Lautsprechern A und B (siehe Abbildung 10.22) interferieren konstruktiv im Punkt C und destruktiv im Punkt D.

Beispiel 10.3 **Interferenz bei Lautsprechern**

Zwei Lautsprecher sind 1,0 m voneinander entfernt. Eine Person steht 4,00 m von einem der Lautsprecher entfernt. Wie groß muss ihr Abstand von dem anderen Lautsprecher sein, um destruktive Interferenz zu erhalten, wenn die Lautsprecher gleichphasige Schallwellen mit 1150 Hz abstrahlen?

Lösung

Die Wellenlänge der Schallwellen beträgt

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{1150\,\mathrm{Hz}} = 0{,}30\,\mathrm{m}\,.$$

Damit destruktive Interferenz auftritt, muss sich die Person eine halbe Wellenlänge weiter vom anderen Lautsprecher befinden, also 0,15 m. Der Abstand vom zweiten Lautsprecher beträgt also 4,15 m (oder 3,85 m). Sind die Lautsprecher weniger als 0,15 m entfernt, so gibt es keinen Punkt, der 0,15 m weiter von einem als vom andren Lautsprecher entfernt ist. Es gibt dann keinen Punkt mit destruktiver Interferenz.

Schwebungen – Interferenz in der Zeit

Wir haben die Interferenz von Schallwellen, die sich im Raum ereignet, diskutiert. Ein interessantes und wichtiges Beispiel für zeitliche Interferenz sind **Schwebungen**: Die Frequenzen zweier Schallquellen – etwa zweier Stimmgabeln – liegen eng beieinander, sind jedoch nicht gleich. Die Schallwellen der beiden Quellen interferieren miteinander und der Schallpegel an einem gegebenen Ort steigt und fällt abwechselnd; die regelmäßig über den Raum verteilten Veränderungen der Intensität heißen Schwebungen.

Um zu sehen, wie Schwebungen entstehen, betrachten wir zwei Schallwellen gleicher Amplitude mit Frequenzen $f_1 = 50$ Hz bzw. $f_2 = 60$ Hz. In 1 s macht die erste 50, die zweite 60 Schwingungen. Wir untersuchen nun die Wellen an einem Punkt, der von beiden Schallquellen die gleiche Entfernung hat. Beide Wellenformen sind als Funktion der Zeit in ▸ Abbildung 10.24 dargestellt. Die rote Kurve stellt die 50-Hz-Welle dar, die blaue die 60-Hz-Welle. Die untere Kurve in Abbildung 10.24 steht für die Summe beider Wellenformen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind beide Wellen in Phase und interferieren konstruktiv. Aufgrund der unterschiedlichen Schwingungszahl driften die beiden Phasen auseinander, und zum Zeitpunkt $t = 0{,}05$ s tritt destruktive Interferenz auf, wie abgebildet. Zum Zeitpunkt $t = 0{,}10$ s sind die Wellen wieder gleichphasig, und die resultierende Amplitude ist wieder groß. Alle 0,1 s wird die Amplitude groß, und zwischen diesen Abständen fällt sie dramatisch. Das Anschwellen und Fallen der Intensität ist das, was man Schwebungen[7] nennt. Im betrachteten Fall treten die Schwebungsmaxima alle 0,1 s

7 Schwebungen sind selbst dann hörbar, wenn die Amplitudendifferenz etwas größer als null ist.

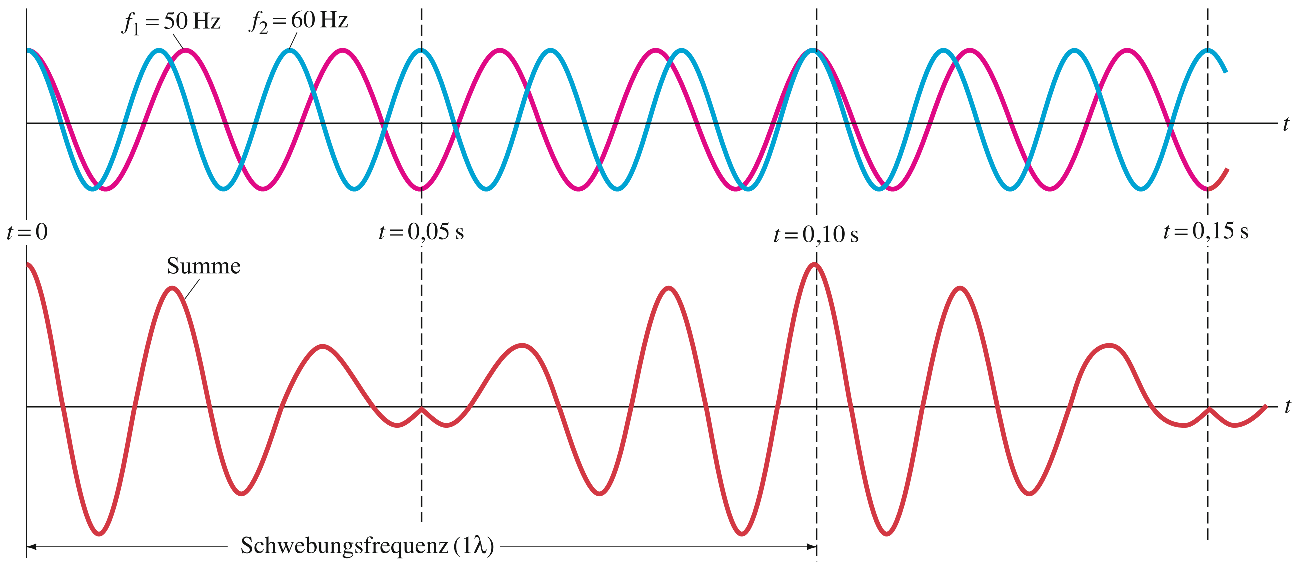


Abbildung 10.24 Schwebungen treten als Resultat der Überlagerung von zwei Schallwellen mit kleinem Frequenzunterschied auf.

auf. Die **Schwebungsfrequenz** beträgt mithin 10 Hz. Das Resultat, dass die Schwebungsfrequenz gleich der Differenz der beiden Einzelfrequenzen ist, kann wie folgt verallgemeinert werden.

Schwebungsfrequenz = Differenz der beiden Einzelfrequenzen

Die beiden Wellen der Frequenzen f_1 und f_2 werden an einem bestimmten Punkt im Raum dargestellt durch

$$D_1 = D_M \sin(2\pi f_1 t)$$

und

$$D_2 = D_M \sin(2\pi f_2 t) \; .$$

Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich für die resultierende Auslenkung

$$D = D_1 + D_2 = D_M \left(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)\right) \; .$$

Mit der Identität $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ erhalten wir

$$D = 2D_M \cos\left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t\right] \sin\left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) t\right] \; . \qquad (10.10)$$

Wir können Gleichung 10.10 wie folgt interpretieren. Die Superposition der beiden Wellen ergibt eine Welle, die mit der mittleren Frequenz $(f_1 + f_2)/2$ der beiden Komponentenwellen schwingt. Diese Schwingung hat eine Amplitude, die durch den Ausdruck in eckigen Klammern gegeben ist. Die Amplitude variiert in der Zeit von null bis zum Maximum $2D_M$ (die Summe der Einzelamplituden) mit einer Frequenz $(f_1 - f_2)/2$. Ein Schwebungsmaximum tritt auf, wann immer $\cos 2\pi[(f_1 - f_2)]t$ gleich $+1$ oder -1 wird (siehe Abbildung 10.24). Das heißt, pro Zyklus gibt es zwei Schwebungsmaxima und somit beträgt die Schwebungsfrequenz zweimal $(f_1 - f_2)/2$, was gerade $f_1 - f_2$ ergibt, die Differenz der Frequenzen der Einzelwellen.

ANGEWANDTE PHYSIK

Klavierstimmen

Das Schwebungsphänomen kann bei allen Wellenarten auftreten und ist eine sehr genaue Methode, um Frequenzen zu vergleichen. Ein Klavierstimmer beispielsweise achtet auf die Schwebungen, die sich zwischen seiner Standardstimmgabel und einer bestimmten Saite einstellen. Verschwinden sie, weiß er, dass das Klavier gestimmt ist. Die Mitglieder eines Orchesters stimmen ihre Instrumente, indem sie auf die Schwebungen zwischen ihren Instrumenten und dem Standardton (gewöhnlich das A über dem mittleren C bei 440 Hz, das ist der sogenannte Kammerton A) eines Klaviers oder einer Oboe achten.

Beispiel 10.4 **Schwebungen**

Eine Stimmgabel erzeugt einen stetigen 400-Hz-Ton. Wird diese Stimmgabel angeschlagen und in die Nähe einer schwingenden Gitarrensaite gebracht, werden 20 Schwebungen in fünf Sekunden gezählt. Welche möglichen Frequenzen erzeugt die Gitarrensaite?

Lösung

Die Schwebungsfrequenz beträgt

$$f_{\text{Schwebung}} = 20\ \text{Schwingungen}/5\ \text{s} = 4\ \text{Hz}\,.$$

Das ist die Frequenzdifferenz der beiden Wellen, und da die eine Welle 400 Hz hat, muss die andere 404 Hz oder 396 Hz haben.

10.8 Stehende Wellen; Resonanz

Wenn Sie ein Seilende bewegen, während das andere Ende fixiert ist, so läuft eine Welle das Seil entlang und wird am fixierten Ende invertiert reflektiert (Abbildung 10.15a). Fahren Sie fort, das Seil zu bewegen, wandern in beiden Richtungen Wellen, die miteinander interferieren. Gewöhnlich ist das ein ziemliches Durcheinander. Wenn Sie jedoch das Seilende mit einer bestimmten Frequenz bewegen, interferieren die beiden Wellen so miteinander, dass eine **stehende Welle** großer Amplitude entsteht (► Abbildung 10.25). Sie heißt deswegen stehende Welle, weil sie sich nicht zu bewegen scheint. Das Seil hat Abschnitte, die in festen Mustern auf- und abschwingen. Die Punkte destruktiver Interferenz, an denen das Seil stets still zu stehen scheint, heißen **Wellenknoten**. Punkte konstruktiver Interferenz, an denen das Seil mit maximaler Amplitude schwingt, heißen **Wellenbäuche**. Bei gegebener Frequenz verbleiben die Knoten und Bäuche fest in ihren Positionen.

Stehende Wellen können bei unterschiedlichen Frequenzen auftreten. Die niedrigste Frequenz, bei der eine stehende Welle auftritt, erzeugt ein Wellenmuster wie in Abbildung 10.25a dargestellt. Die stehenden Wellen in den Teilen (b) und (c) werden bei exakt der doppelten respektive dreifachen Frequenz der niedrigsten Frequenz erzeugt, vorausgesetzt die Seilspannung bleibt gleich. Das Seil kann auch ebenso gut vier Bäuche bei einer viermal so großen Frequenz haben usw.

Die Frequenzen, die stehende Wellen erzeugen, heißen **Eigen-** oder **Resonanzfrequenzen** des Seils. Die unterschiedlichen Wellenmuster in Abbildung 10.25 sind verschiedene **Eigenzustände**. Obgleich eine stehende Welle auf einem Seil das Resultat der Interferenz zweier gegenläufiger Wellen ist, ist sie auch ein in Resonanz schwingendes System. Stehende Wellen stellen damit das gleiche Phänomen dar wie die Resonanz eines Federpendels oder eines Fadenpendels, was wir in Kapitel 9 diskutiert haben. Der wesentliche Unterschied jedoch ist, dass ein Federpendel oder ein Fadenpendel nur eine Resonanzfrequenz hat, wohingegen das Seil eine unbegrenzte Anzahl Resonanzfrequenzen besitzt, von denen jede ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist.

Wir wollen nun ein Seil betrachten, das an beiden Enden eingespannt ist, wie eine Gitarren- oder Violinsaite (► Abbildung 10.26a). Unterschiedliche Wellen wandern in beiden Richtungen, werden an den Enden reflektiert, um dann in die andere Richtung zu laufen. Die meisten dieser Wellen interferie-

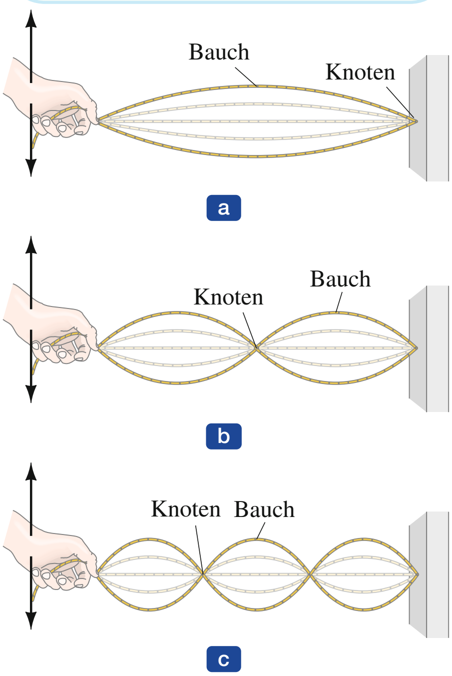


Abbildung 10.25 Stehende Wellen dreier Resonanzfrequenzen.

ren nach einem Zufallsmuster mit den anderen und löschen sich gegenseitig aus. Doch die Wellen, die den Resonanzfrequenzen der Saite entsprechen, schwingen weiter. Die Saitenenden sind eingespannt, somit sind sie Knoten. Allerdings gibt es bei den höheren Resonanzen noch weitere Knoten. Einige der möglichen Resonanzzustände (stehende Wellen) sind in Abbildung 10.26b gezeigt. Allgemein ist das Wellenmuster eine Kombination dieser unterschiedlichen Resonanzfrequenzen. Nur solche Frequenzen, die einer Resonanzfrequenz entsprechen, sind vorhanden.

Um die Resonanzfrequenzen zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass die Wellenlänge einer stehenden Welle in einfacher Beziehung zur Saitenlänge L steht. Die niedrigste Frequenz, genannt die **Grundfrequenz**, korrespondiert mit einem Wellenbauch. Und wie man in Abbildung 10.26b sehen kann, entspricht die Gesamtlänge einer halben Wellenlänge. Somit ist $L = \frac{1}{2}\lambda_1$, wobei λ_1 die Wellenlänge der Grundfrequenz ist. Die anderen Resonanzfrequenzen heißen **Oberwellen**. Sind sie ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz (wie das bei einer einfachen Saite der Fall ist), nennt man sie auch **harmonisch**, wobei man sich auf die Grundfrequenz häufig als die Erste Harmonische bezieht. Der nächste Zustand nach der Grundschwingung hat zwei Bäuche und wird die **Zweite Harmonische** (oder die erste Oberwelle) genannt. Die Saitenlänge L entspricht bei der Zweiten Harmonischen der gesamten Wellenlänge: $L = \lambda_2$. Für die Dritte und Vierte Harmonische gilt $L = \frac{3}{2}\lambda_3$ respektive $L = 2\lambda_4$ und so weiter. Ganz allgemein können wir schreiben:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2}\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\,.$$

Die ganze Zahl n nummeriert die Harmonischen durch: $n = 1$ für die Grundfrequenz, $n = 2$ für die Zweite Harmonische und so weiter. Wir lösen nach λ_n auf und finden:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},\ n = 1, 2, 3 \ldots\,. \qquad (10.11)$$

Um die Frequenz f jeder Schwingung zu finden, nutzen wir Gleichung 10.1, $f = v/\lambda$, und sehen, dass

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} = nf_1\,,$$

worin $f_1 = v/\lambda_1 = v/2L$ die Grundfrequenz ist. Wir sehen daher, dass jede Resonanzfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist.

Weil eine stehende Welle als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen aufgefasst werden kann, sprechen wir immer noch von der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Eine stehende Welle scheint an einem Ort stehen zu bleiben (und laufende Wellen scheinen sich zu bewegen). Der Ausdruck „stehende" Welle ist auch energetisch betrachtet sinnvoll. Da die Saite an den Knoten im Ruhezustand ist, wird an diesen Punkten keine Energie transportiert. Folglich wird keine Energie entlang der Saite transportiert, sondern sie liegt in jedem Punkt der Saite zeitlich konstant vor.

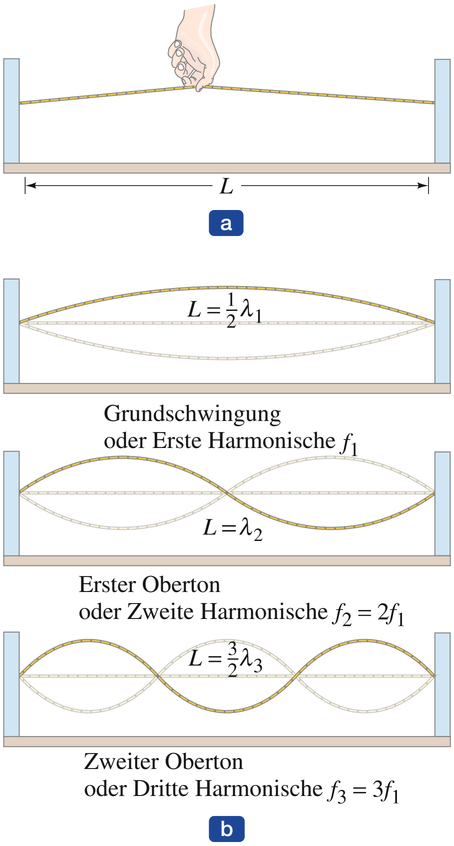


Abbildung 10.26 (a) Eine Saite wird gezupft. (b) Nur stehende Wellen, die mit den Resonanzfrequenzen korrespondieren, schwingen länger.