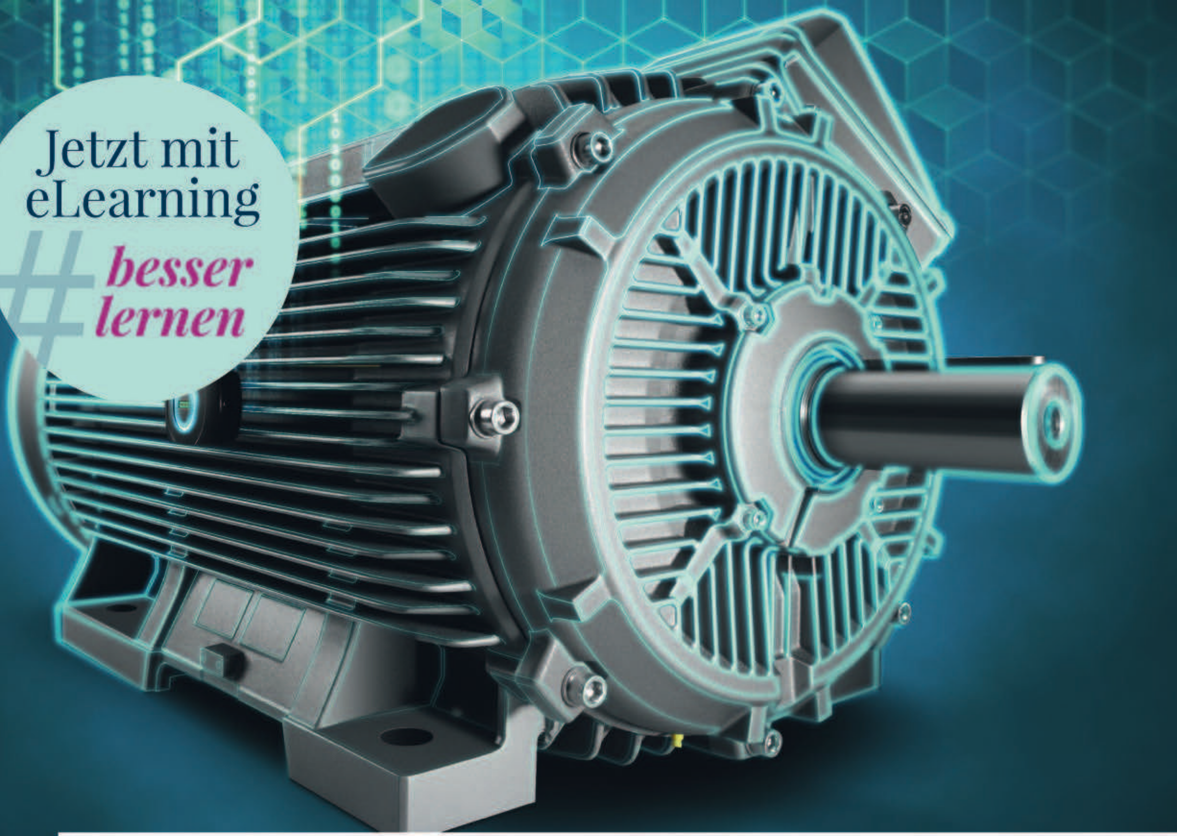
Jetzt mit eLearning

#besser lernen



Elektrotechnik 2

Periodische und nicht periodische Signalformen

3., aktualisierte Auflage

Manfred Albach

Pearson

Zugangscode

Nutzungsdauer 12 Monate

https://www.pearson-studium.de/mylab/elektrotechnik2

Bei einer genaueren Analyse der beiden Gln. (8.159) und (8.161) stellt man fest, dass die Aufteilung der Momentanleistung $p(t)$ in die beiden Summanden für die bereits betrachteten Sonderfälle von Widerstand $\varphi_u - \varphi_i = 0$, Induktivität $\varphi_u - \varphi_i = \pi/2$ und Kapazität $\varphi_u - \varphi_i = -\pi/2$ zwar identisch ist, dass aber jeder andere mögliche Phasenunterschied zwischen Strom und Spannung zu einer unterschiedlichen Aufteilung führt. Die beiden zeitabhängigen Summanden in den genannten Gleichungen besitzen zwar gleiche Amplituden, die Phasen sind aber unterschiedlich.

Bevor wir die Frage näher untersuchen, welcher der beiden Ausdrücke die an einem Widerstand in Wärme umgesetzte Leistung zu jedem Zeitpunkt richtig beschreibt, stellen wir die beiden Gleichungen noch einmal gemeinsam dar. Mit den in den Gln. (8.162) und (8.163) definierten Begriffen gelten die Beziehungen

$$p(t) = P \begin{matrix} \left[1+\cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] \\ \left[1+\cos(2\omega t + 2\varphi_i)\right] \end{matrix} \pm Q \begin{matrix} \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \\ \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \end{matrix} . \tag{8.164}$$

Die weitere Untersuchung führen wir an einem konkreten Beispiel durch. Für die in ▶Abb. 8.65 dargestellte Reihenschaltung aus einem Widerstand R und einer Induktivität L sind bereits alle benötigten Zusammenhänge in Beispiel 8.2 abgeleitet. Wir wählen das Impedanzverhältnis $\omega L / R = \sqrt{3}$ und erhalten mit Gl. (8.53) eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von $\varphi_u - \varphi_i = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$ bzw. 60°. Mit einer angenommenen Spannungsamplitude $\hat{u} = 2\,\text{V}$ und einem Widerstand $R = 1\,\Omega$ stellt sich nach Gl. (8.53) eine Stromamplitude $\hat{i} = 1\,\text{A}$ ein. Die zugehörigen zeitabhängigen Verläufe sind in Abb. 8.65 dargestellt.

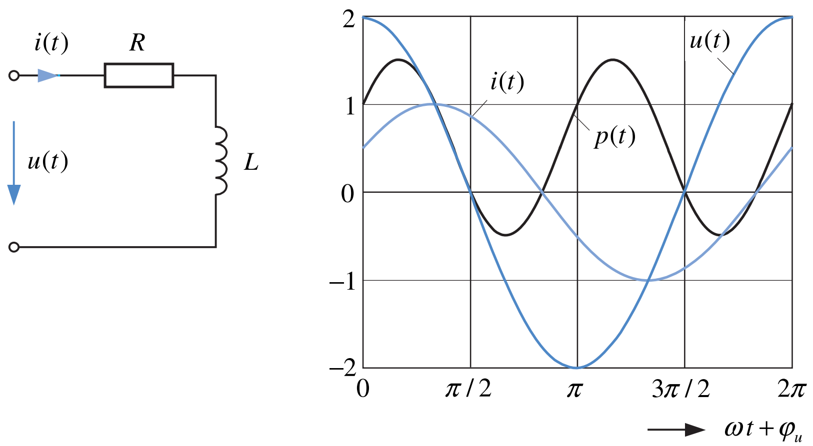


Abbildung 8.65: Signalverläufe an einer *RL*-Reihenschaltung bei Wechselspannung

Für die zeitabhängige Leistung am Widerstand muss gelten

$$p_R(t) = i^2(t) \cdot R = 1\,\text{W} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_i) \overset{(\text{H.3})}{=} \frac{1}{2}\,\text{W}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)\right] . \tag{8.165}$$

Mit $P = (2\,\mathrm{V}/\sqrt{2}) \cdot (1\,\mathrm{A}/\sqrt{2})\cos(\pi/3) = 1/2\,\mathrm{W}$ ist der erste Ausdruck in der unteren Zeile der Gl. (8.164) identisch zur Gl. (8.165). Dieser beschreibt somit richtig die zeitabhängigen Verluste im Widerstand. Der entsprechende Ausdruck in der oberen Zeile ist demgegenüber um $2(\varphi_u - \varphi_i) = 2\pi/3$ in der Phase verschoben. Wie lässt sich dieser Sachverhalt nun verstehen? Betrachten wir dazu das Zeigerdiagramm in ▶Abb. 8.66, in dem der Strom zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem beliebigen Phasenwinkel φ_i und die Spannung zum gleichen Zeitpunkt um $\pi/3$ voreilend dargestellt sind. In der betrachteten Reihenschaltung werden beide Komponenten vom gleichen Strom durchflossen. Am Widerstand ist die Spannung u_R in Phase mit dem Strom und an der Induktivität ist die Spannung u_L um $\pi/2$ voreilend. Wir müssen also die Spannung $u(t)$ zerlegen in die beiden senkrecht aufeinanderstehenden Komponenten u_R mit der Zeigerlänge $\hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ und u_L mit der Zeigerlänge $\hat{u}\sin(\varphi_u - \varphi_i)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_i) + \hat{u}\sin(\varphi_u - \varphi_i)\cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_i) - \hat{u}\sin(\varphi_u - \varphi_i)\sin(\omega t + \varphi_i) = u_R(t) + u_L(t)\,. \end{aligned} \tag{8.166}$$

Das Produkt dieser beiden Komponenten mit dem Strom (8.147) ist identisch zu der unteren Zeile in Gl. (8.164). Wir können also feststellen, dass die Zerlegung der Momentanleistung in die beiden Anteile, in denen die zeitabhängigen Funktionen die Phasenverschiebung des Stromes φ_i im Argument enthalten, auch die Aufteilung der Eingangsleistung auf die beiden Komponenten Widerstand und Induktivität bei der Reihenschaltung zu jedem Zeitpunkt richtig wiedergibt. Diese Aufteilung der Momentanleistung ist ebenfalls in der Abb. 8.66 dargestellt. Ein Vergleich der Abb. 8.65 und 8.66 zeigt, dass der Maximalwert der am Widerstand entstehenden Verluste $p_R(t)$ zeitgleich mit dem Maximalwert des Stromes auftritt.

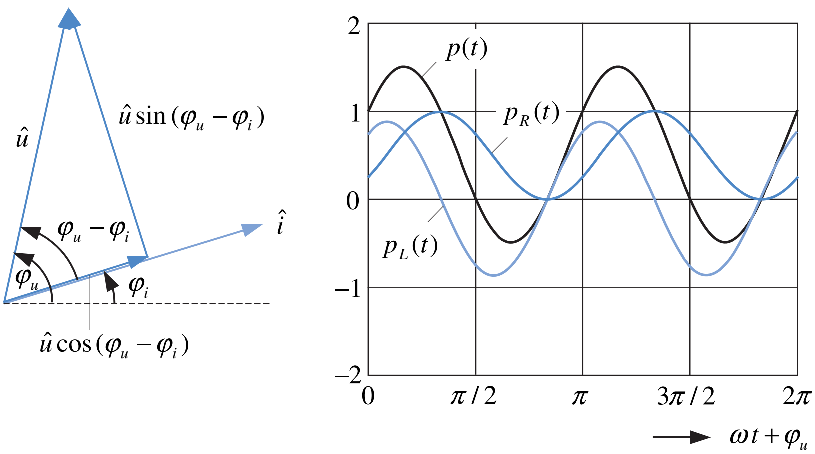


Abbildung 8.66: Zeigerdiagramm und Aufteilung der Momentanleistung für die *RL*-Reihenschaltung

Damit ist es auch naheliegend zu vermuten, dass die obere Zeile in Gl. (8.164) die Verhältnisse bei der Parallelschaltung richtig beschreibt. Wir überprüfen das, indem wir die bisherige Reihenschaltung bei der gleichen Frequenz durch eine äquivalente Parallelschaltung aus einem Widerstand und einer Induktivität entsprechend den Beziehungen in Abb. 8.18 ersetzen. Strom und Spannung an den Eingangsklemmen nach Gl. (8.147) und auch die Leistung $p(t)$ sind damit unverändert gegenüber dem bisher betrachteten Fall. Da jetzt die Spannung an beiden Komponenten gleich ist, muss der Strom in einen Anteil i_R in Phase zur Spannung und in einen um $\pi/2$ nacheilenden Anteil i_L zerlegt werden. Mit den in ▶Abb. 8.67 bereits angegebenen Zeigerlängen $\hat{i}\cos(\varphi_u-\varphi_i)$ für i_R und $\hat{i}\sin(\varphi_u-\varphi_i)$ für i_L gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i) = \hat{i}\cos(\varphi_u-\varphi_i)\cos(\omega t+\varphi_u) + \hat{i}\sin(\varphi_u-\varphi_i)\cos\left(\omega t+\varphi_u-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \hat{i}\cos(\varphi_u-\varphi_i)\cos(\omega t+\varphi_u) + \hat{i}\sin(\varphi_u-\varphi_i)\sin(\omega t+\varphi_u) = i_R(t)+i_L(t)\,, \end{aligned} \tag{8.167}$$

die mit der Spannung (8.147) multipliziert der oberen Zeile der Gl. (8.164) entspricht. Diese Aufteilung der Momentanleistung für die Parallelschaltung ist ebenfalls in der Abb. 8.67 dargestellt. In diesem Fall tritt der Maximalwert der am Widerstand entstehenden Verluste $p_R(t)$ zeitgleich mit dem Maximalwert der Spannung auf.

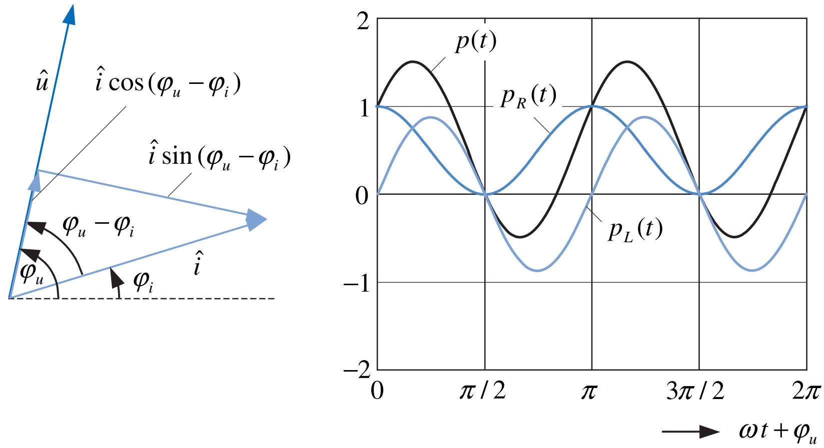


Abbildung 8.67: Zeigerdiagramm und Aufteilung der Momentanleistung für die *RL*-Parallelschaltung

Merke

Besteht der Zweipol aus der Reihenschaltung eines Widerstandes mit einer Reaktanz, dann sind die zeitabhängigen Verluste im Widerstand in Phase mit dem Quadrat des Stromes. Bei der Parallelschaltung aus einem Widerstand und einer Reaktanz sind die zeitabhängigen Verluste im Widerstand in Phase mit dem Quadrat der Spannung.

Betrachten wir noch einmal die beiden Zeigerdiagramme in den Abb. 8.66 und 8.67. Werden alle drei Seiten des aus den Spannungen gebildeten Dreiecks in Abb. 8.66 mit dem Faktor $\hat{i}/2$ oder aber alle drei Seiten des aus den Strömen gebildeten Dreiecks in Abb. 8.67 mit dem Faktor $\hat{u}/2$ multipliziert, dann entsprechen die beiden Katheten des jeweils neu entstehenden Dreiecks der Wirkleistung und der Blindleistung. Die Hypotenuse

$$S = U\,I = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{8.168}$$

wird als **Scheinleistung** S bezeichnet. Sie entspricht dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom ohne Berücksichtigung des Leistungsfaktors. Die Bezeichnung Scheinleistung hängt damit zusammen, dass sie keine Leistung im physikalischen Sinne darstellt, da Strom und Spannung zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten.

Mit dieser Definition kann der Leistungsfaktor auch aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung berechnet werden:

$$\lambda = \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{P}{S}\,. \tag{8.169}$$

Die Einheiten für die Leistungen P, Q und S ergeben sich immer aus dem Produkt von $[U]\cdot[I] = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$. Um Verwechslungen bei der Leistungsangabe auf elektrischen Geräten zu vermeiden, werden daher vereinbarungsgemäß die folgenden Einheiten verwendet:

Tabelle 8.5

Leistungseinheiten

	Formel	Einheit
Wirkleistung	$P = U\,I\cos(\varphi_u - \varphi_i)$	W (Watt)
Blindleistung	$Q = U\,I\sin(\varphi_u - \varphi_i)$	VAr (Voltampere, reaktiv)
Scheinleistung	$S = U\,I = \frac{1}{2}\hat{u}\,\hat{i}$	VA (Voltampere)

8.8.4 Komplexe Leistung

In den bisherigen Formeln wurden die verschiedenen Leistungen aus den zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufen berechnet. Da bei den Wechselgrößen üblicherweise mit komplexen Amplituden gerechnet wird, sei hier der Begriff der komplexen Leistung eingeführt. Sind die komplexen Amplituden von Strom $\underline{\hat{i}}$ und Spannung $\underline{\hat{u}}$ nach Gl. (8.18) bekannt und kennzeichnet $\underline{\hat{i}}^*$ den konjugiert komplexen Wert von $\underline{\hat{i}}$, dann wird die komplexe Leistung definiert durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\underline{\hat{u}}\,\underline{\hat{i}}^* \overset{(8.18)}{=} \frac{1}{2}\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\left(\hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\right)^* = \frac{1}{2}\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\,\hat{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_i} = U\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= U\,I\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \mathrm{j}\,U\,I\sin(\varphi_u - \varphi_i) = P + \mathrm{j}Q\,.\end{aligned} \tag{8.170}$$

Der Realteil der komplexen Leistung[7] entspricht der Wirkleistung, der Imaginärteil entspricht der Blindleistung. Nach Gl. (8.168) ist der Betrag der komplexen Leistung gleich der Scheinleistung

$$\left|\underline{S}\right| = \left|P + \mathrm{j}Q\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S\,. \tag{8.171}$$

Die komplexe Leistung stellt offenbar eine Rechengröße dar, aus der sowohl Wirk-, Blind- als auch Scheinleistung berechnet werden können.

Beispiel 8.4: Komplexe Leistung am Widerstand

Ein Strom mit der komplexen Amplitude $\hat{\underline{i}}$ fließt durch einen ohmschen Widerstand R. Welche Leistung wird an dem Widerstand in Wärme umgewandelt?

Die Wirkleistung an R kann nach Gl. (8.170) in der folgenden Weise berechnet werden

$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^{\,*}\right\} \overset{(8.28)}{=} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}R\,\hat{\underline{i}}\,\hat{\underline{i}}^{\,*}\right\} \overset{(\mathrm{E}.14)}{=} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}R\left|\hat{\underline{i}}\right|^2\right\} = \frac{1}{2}R\left|\hat{\underline{i}}\right|^2 . \tag{8.172}$$

Die Realteilbildung entfällt, da am Widerstand keine Blindleistung entsteht und das Argument bereits reell ist. Zur Berechnung der Verluste stehen somit die beiden Möglichkeiten

$$P = \frac{1}{2}R\left|\hat{\underline{i}}\right|^2 = R\,I^2 \quad \text{bzw.} \quad P = \frac{1}{2}\frac{\left|\hat{\underline{u}}\right|^2}{R} = \frac{1}{R}U^2 \tag{8.173}$$

zur Verfügung, in Übereinstimmung mit der Gl. (7.13).

Allgemein lässt sich die komplexe Leistung an einer Impedanz $\underline{Z}$ bzw. an einer Admittanz $\underline{Y}$ durch die folgenden Zusammenhänge darstellen:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^{\,*} \overset{(8.22)}{=} \frac{1}{2}\underline{Z}\,\hat{\underline{i}}\,\hat{\underline{i}}^{\,*} \overset{(\mathrm{E}.14)}{=} \frac{1}{2}\underline{Z}\left|\hat{\underline{i}}\right|^2 = \underline{Z}\,I^2 = \frac{1}{\underline{Y}}I^2 \\ &= \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\frac{\hat{\underline{u}}^*}{\underline{Z}^*} = \frac{1}{\underline{Z}^*}U^2 = \underline{Y}^*\,U^2\,.\end{aligned} \tag{8.174}$$

7 Die komplexe Leistung könnte ebenso als das Produkt von der komplexen Amplitude des Stromes mit dem konjugiert komplexen Wert der Spannungsamplitude definiert werden. Bei der oben gewählten Definition ergibt die induktive Blindleistung einen positiven, die kapazitive Blindleistung einen negativen Imaginärteil.

8.9 Leistungsanpassung

In Kapitel 3.7.2 haben wir die Frage nach der maximalen Leistungsabgabe an einen ohmschen Verbraucher (Lastwiderstand R_L) in einem Gleichstromnetzwerk untersucht. Wir wollen jetzt die gleiche Frage für den verallgemeinerten Fall beantworten, bei dem der Verbraucher mit einer Impedanz $\underline{Z}_L = R_L + \mathrm{j}X_L$ an eine Wechselspannungsquelle $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t)$ mit einer Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ angeschlossen ist. Das zugrunde liegende Schaltbild mit den komplexen Amplituden ist in ▶Abb. 8.68 dargestellt.

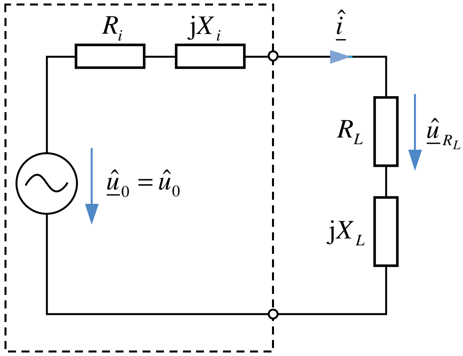


Abbildung 8.68: Zur Berechnung der maximalen Wirkleistung am Lastwiderstand

Wir wollen dabei zwei unterschiedliche Fälle betrachten, bei denen sich jeweils maximale Wirkleistung an R_L einstellen soll. Im ersten Fall wird angenommen, dass bei der Lastimpedanz sowohl R_L als auch X_L einstellbar sind, beim zweiten Fall besteht der Verbraucher nur aus einem veränderbaren Wirkwiderstand R_L und es gilt $X_L = 0$.

Mit der komplexen Amplitude für den Strom

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\hat{u}_0}{R_i + R_L + \mathrm{j}(X_i + X_L)} \tag{8.175}$$

kann die Wirkleistung an R_L nach Gl. (8.173) berechnet werden:

$$P_L = \frac{1}{2} R_L \left|\underline{\hat{i}}\right|^2 = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2} \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} \,. \tag{8.176}$$

Diese Leistung soll für die beiden zu betrachtenden Fälle einen Maximalwert annehmen.

8.9.1 Lastimpedanz mit einstellbarem Wirk- und Blindwiderstand

Die Bedingung für X_L ist ohne Rechnung aus der Gleichung ablesbar. Die Leistung wird maximal, wenn der Nenner in Gl. (8.176) minimal wird, d.h., es muss gelten:[8]

$$X_L = -X_i\,. \tag{8.177}$$

Die beiden Blindwiderstände müssen sich gegenseitig kompensieren. Wir haben hier die gleiche Situation wie bei dem Serienschwingkreis in Kapitel 8.5.1, der bei seiner Resonanzfrequenz betrieben wird (Vorsicht: An der Innenimpedanz der Quelle und am Verbraucher kann **Spannungsüberhöhung** auftreten).

Für die weitere Betrachtung reduziert sich das Netzwerk auf die ohmschen Widerstände. Die Forderung, dass der verbleibende Ausdruck

$$P_L = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2}\frac{R_L}{\left(R_i + R_L\right)^2} \tag{8.178}$$

abhängig von R_L maximal werden soll, führt in Übereinstimmung mit der Ableitung bei den Gleichstromnetzwerken wieder auf die Bedingung

$$R_L = R_i\,. \tag{8.179}$$

Aus der Zusammenfassung der beiden Gleichungen (8.177) und (8.179) folgt

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^{\,*}\,. \tag{8.180}$$

Merke

Eine Wechselspannungsquelle mit der Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ gibt die maximale Wirkleistung an einen Verbraucher ab, wenn dessen Impedanz $\underline{Z}_L$ dem konjugiert komplexen Wert der Innenimpedanz $\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^{\,*}$ entspricht.

Die am Ausgang **verfügbare Wirkleistung** beträgt dann mit Gl. (8.176):

$$P_{\max} = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2}\frac{1}{4R_i} = \frac{U_0^{\,2}}{4R_i}\,. \tag{8.181}$$

Diese Beziehung hat den gleichen Aufbau wie bei den Gleichstromnetzwerken, wobei jetzt allerdings U_0 den Effektivwert der Quellenspannung bezeichnet. Der Wirkungsgrad beträgt in diesem Arbeitspunkt wieder 50 %, d.h., die verbrauchte Leistung am Innenwiderstand R_i ist genauso groß wie die abgegebene Leistung am Lastwiderstand R_L.

Wird der Lastwiderstand in dem möglichen Wertebereich $0 \le R_L < \infty$ variiert, dann ändern sich auch die Ausgangsleistung und der Wirkungsgrad, und zwar auf die gleiche Weise, wie es bei den Gleichstromnetzwerken in den Abb. 3.32 und 3.34 dargestellt ist.

8 Der mathematisch exakte Beweis lässt sich erbringen, wenn aus der Forderung $\mathrm{d}P_L/\mathrm{d}X_L = 0$ der Wert X_L bestimmt wird und die zweite Ableitung für diesen Wert kleiner null wird $\mathrm{d}^2P_L/\mathrm{d}X_L^{\,2} < 0$.

8.9.2 Reiner Wirkwiderstand als Verbraucher

Der bisherigen Rechnung soll jetzt der Fall gegenübergestellt werden, dass der Verbraucher ausschließlich aus einem Wirkwiderstand besteht. Die maximale Wirkleistung in Abhängigkeit von dem Lastwiderstand $\underline{Z}_L = R_L$ erhält man aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\,P_L}{\mathrm{d}\,R_L} \overset{(8.176)}{=} \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R_L} \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + X_i^{\,2}} \overset{!}{=} 0\,. \tag{8.182}$$

Die Ausführung der Differentiation liefert die Beziehung

$$\frac{(R_i + R_L)^2 + X_i^{\,2} - 2R_L\,(R_i + R_L)}{\left[(R_i + R_L)^2 + X_i^{\,2}\right]^2} \overset{!}{=} 0\,, \tag{8.183}$$

in der der Zähler verschwinden muss:

$$(R_i + R_L)^2 + X_i^{\,2} - 2R_L\,(R_i + R_L) = R_i^2 - R_L^{\,2} + X_i^{\,2} \overset{!}{=} 0\,. \tag{8.184}$$

Für den hier betrachteten Fall $X_L = 0$ erhalten wir aus der Forderung (8.184) das Ergebnis[9]

$$\underline{Z}_L = R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^{\,2}} = \left|\underline{Z}_i\right|\,. \tag{8.185}$$

Merke

Eine Wechselspannungsquelle mit der Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ gibt die maximale Leistung an einen ohmschen Widerstand R_L ab, wenn dieser einen Wert aufweist, der dem Betrag der Quellenimpedanz $\left|\underline{Z}_i\right|$ gleich ist.

Die am Lastwiderstand **verfügbare Wirkleistung** erhält man, wenn der Wert (8.185) in die Gl. (8.176) eingesetzt wird:

$$P_{\max} = \frac{\hat{u}_0^{\,2}}{4} \frac{1}{R_i + \sqrt{R_i^2 + X_i^{\,2}}} = \frac{U_0^{\,2}}{2} \frac{1}{R_i + \sqrt{R_i^2 + X_i^{\,2}}}\,. \tag{8.186}$$

Dieser Wert ist geringer als bei der konjugiert komplexen Anpassung, und zwar umso mehr, je größer der Blindwiderstand X_i wird. Bei $X_i = 0$ sind die beiden Ergebnisse (8.180) und (8.185) identisch.

9 Um zu überprüfen, ob es sich bei dem Ergebnis wirklich um ein Maximum handelt, muss die nochmalige Ableitung der Gl. (8.183) für den berechneten Lastwiderstand negativ sein. Diese Kontrolle sei dem Leser überlassen.

Beispiel 8.5: Wirkleistungsanpassung

Eine Wechselspannungsquelle besitzt bei der eingestellten Frequenz eine Impedanz $\underline{Z}_i = 50\,\Omega + \mathrm{j}20\,\Omega$. Welche Impedanz muss der Verbraucher haben, um aus der Quelle maximale Wirkleistung entnehmen zu können?

Bei einer Anpassung mit konjugiert komplexer Quellenimpedanz muss die positive Reaktanz der Quelle nach Gl. (8.177) mit einer negativen Reaktanz des Verbrauchers kompensiert werden. Die Last besteht also aus der Reihenschaltung von einem ohmschen Widerstand $R_L = 50\Omega$ nach Gl. (8.179) und einer Kapazität, die bei der gleichen Frequenz den betragsmäßig gleichen Blindwiderstand aufweist.

Besteht die Last lediglich aus einem angepassten ohmschen Widerstand, dann muss dieser nach Gl. (8.185) den Wert $R_L = |\underline{Z}_i|$ aufweisen. Die beiden unterschiedlichen Verbraucher sind in der ▶Abb. 8.69 eingetragen.

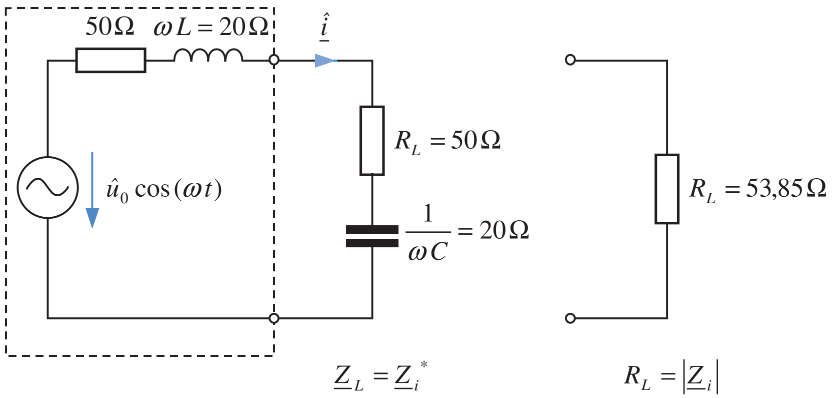


Abbildung 8.69: Zahlenbeispiel zur Wirkleistungsanpassung

8.9.3 Fehlanpassung

In diesem Abschnitt wollen wir die Frage untersuchen, welcher Anteil der von der Quelle zur Verfügung gestellten Wirkleistung am Verbraucher ankommt, wenn dessen Impedanz von dem in Gl. (8.180) angegebenen optimalen Wert abweicht. Für das Verhältnis der Leistung am Verbraucher nach Gl. (8.176) zur verfügbaren Leistung nach Gl. (8.181) gilt zunächst

$$\frac{P_L}{P_{\max}} = \frac{4R_iR_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}\,. \tag{8.187}$$

Durch elementare Umformungen können wir diese Gleichung auch in der folgenden Form schreiben:

$$R_L^{\,2} - 2R_L R_i \left(2\frac{P_{\max}}{P_L} - 1\right) + \left(X_i + X_L\right)^2 = -R_i^{\,2}\,. \tag{8.188}$$

Nach Hinzufügen der quadratischen Ergänzung und Division durch R_i^2 erhalten wir die Gleichung

$$\left[\frac{R_L}{R_i} - \left(2\frac{P_{\max}}{P_L} - 1\right)\right]^2 + \left(\frac{X_L + X_i}{R_i}\right)^2 = 4\frac{P_{\max}}{P_L}\left(\frac{P_{\max}}{P_L} - 1\right). \tag{8.189}$$

Diese besitzt aber die Form der bekannten Kreisgleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ mit dem Kreismittelpunkt bei x_M, y_M und dem Kreisradius r. Mit der Achsenfestlegung

$$x = \frac{R_L}{R_i} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{X_L + X_i}{R_i} \tag{8.190}$$

gelten die Zusammenhänge

$$x_M = 2\frac{P_{\max}}{P_L} - 1, \qquad y_M = 0 \qquad \text{und} \qquad r = \sqrt{4\frac{P_{\max}}{P_L}\left(\frac{P_{\max}}{P_L} - 1\right)}\,. \tag{8.191}$$

Die Abb. ▶8.70 zeigt die Auswertung dieser Gleichung.

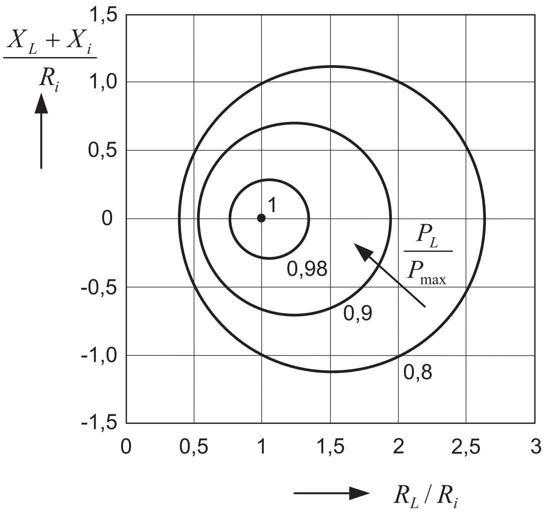


Abbildung 8.70: Ortskurven für konstante Leistungsverhältnisse $P_L/P_{\max}$

Alle Punkte auf einem Kreis liefern das gleiche Leistungsverhältnis $P_L/P_{\max}$. Bei Leistungsanpassung $P_L = P_{\max}$ schrumpft der Kreis wegen $r = 0$ zu einem Punkt an der Stelle $x = x_M = 1$, d.h. $R_L = R_i$ und $y = y_M = 0$, d.h. $X_L = -X_i$. Diese Aussage entspricht der bereits aufgestellten Forderung für die Leistungsanpassung in Gl. (8.180).

Auffallend ist die Symmetrie der Kreise bezüglich der Ebene $y = 0$. Eine Differenz zwischen den Werten X_L und $-X_i$ geht nur betragsmäßig in das Ergebnis ein, das Vorzeichen spielt dabei keine Rolle. Die Werte für P_L/P_{max} in der Symmetrieebene, d.h. für $X_L = -X_i$, sind abgesehen von der unterschiedlichen Darstellung identisch mit dem Diagramm in Abb. 3.32. Für $R_L = R_i$ erhalten wir den Wert 1 und für $R_L = 0$ bzw. $R_L \to \infty$ verschwindet die Ausgangsleistung. Der Wirkungsgrad, also das Verhältnis von der am Lastwiderstand verbrauchten Leistung zu der gesamten von der Quelle abgegebenen Leistung, ist wieder durch die Beziehung (3.52) gegeben. Die Reaktanzen X_L und X_i spielen bei der Wirkungsgradbetrachtung keine Rolle.

8.10 Blindstromkompensation

Eine zur Leistungsanpassung vergleichbare Situation liegt vor, wenn ein Verbraucher mit einer fest vorgegebenen Impedanz an eine Quelle wie z.B. das 50-Hz-Versorgungsnetz angeschlossen werden soll. Wir wählen als Beispiel einen Motor, dessen Impedanz aus einem ohmschen und einem induktiven Anteil besteht. Zur Vereinfachung soll die Impedanz der Quelle, die in der Praxis klein ist gegenüber der Lastimpedanz, bei der Betrachtung vernachlässigt werden. Das Netzwerk ist mit dem zugehörigen Zeigerdiagramm in ▶Abb. 8.71 dargestellt. Der Strom eilt bei der *RL*-Reihenschaltung der Spannung nach (vgl. Abb. 8.16).

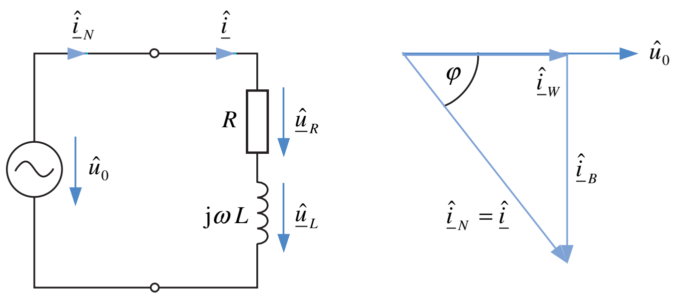


Abbildung 8.71: Beispiel zur Blindstromkompensation

Die Zerlegung des von der Quelle gelieferten Stromes $\hat{\underline{i}}$ in einen Wirkanteil $\hat{\underline{i}}_W = \hat{i}_W$, der sich in Phase mit der Quellenspannung befindet, und in einen Blindanteil $\hat{\underline{i}}_B = -\mathrm{j}\left|\hat{\underline{i}}_B\right|$, der der Quellenspannung um $\pi/2$ nacheilt, entspricht unmittelbar der Zerlegung der von der Quelle abgegebenen komplexen Leistung in ihren Wirkanteil und ihren Blindanteil:

$$\underline{S} = P + \mathrm{j}Q = \frac{1}{2}\hat{u}_0\,\hat{\underline{i}}^* = \frac{1}{2}\hat{u}_0\left(\hat{i}_W + \mathrm{j}\left|\hat{\underline{i}}_B\right|\right) = \frac{1}{2}\hat{u}_0\left|\hat{\underline{i}}\right|\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right). \tag{8.192}$$

Zur Übertragung der gleichen Wirkleistung von der Quelle zum Verbraucher wäre ein Strom mit der Amplitude $\hat{i}_W$ ausreichend. Infolge des geringen Leistungsfaktors muss die Quelle aber zusätzliche Blindenergie zur Verfügung stellen und die deutlich größere Stromamplitude $\left|\hat{\underline{i}}\right|$ belastet in erhöhtem Maße die Leitungen und Transformatoren in den Verteilungsnetzen.