Statistische Methoden der VWL und BWL

Theorie und Praxis

5., aktualisierte Auflage

Josef Schira

EXTRAS ONLINE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Karsten Schwanke: *Wir haben jetzt fast sechs Monate schon den Euro in den Händen. Da gibt's ja jetzt vielerorts bei den meisten Leuten die Befürchtung und Meinung, alles hat sich verteuert. Auch das haben Sie untersucht. Was können Sie uns sagen? Haben sich die Preise bei der Euro-Umstellung definitiv geändert, und zwar nach oben?*

Jürgen Chlumsky: So kann man das nicht sagen. Unser Geld hat durch die Währungsumstellung nicht an Wert verloren. Aber es gibt unterschiedliche Entwicklungen. So haben wir es im Dienstleistungssektor – und da können wir es tatsächlich beobachten – mit Preissteigerungen zu tun, die über das normale Maß hinausgehen.

Karsten Schwanke: *Was ist da besonders teuer geworden?*

Jürgen Chlumsky: Es fällt auf, dass im Gaststättengewerbe im Grunde genommen rundum die Preise heftig gestiegen sind, und zwar in der Tat zu Beginn des Jahres. Wir haben da einen Preissprung, den es so und auch sonst zu einem Jahrswechsel nicht gegeben hat. Hier ist es der Verzehr von Bier und von Mineralwasser, das gilt aber ebenso für 'ne Pizza und ein Schnitzel.

Karsten Schwanke: *Hier in diesem Haus in Wiesbaden beim Statistischen Bundesamt arbeiten ja mehr als 2000 Mitarbeiter, aber etwa 23 kümmern sich genau um diese Verbraucherpreise. Hier werden die Preise, die Preisentwicklungen berechnet und statistisch untersucht für Deutschland. Nun sagt ja der Name Euro, wir haben es hier auch mit einem europäischen Problem oder mit einer europäischen Angelegenheit zu tun. Wie sehen denn die Warenkörbe in den anderen europäischen Ländern aus und wird dort auch nach der gleichen Methode gerechnet?*

Jürgen Chlumsky: Die Warenkörbe sehen in den anderen Ländern anders aus, denn die Verbrauchsbedeutung der einzelnen Produkte sieht auch anders aus. Das Heizen hat in Norwegen einen anderen Stellenwert als z. B. in Griechenland. Roggenbrot hat in Frankreich nicht die Bedeutung wie in Deutschland. Aber die Methodik, die Verfahren in der Preisermittlung, auch die Klassifikation und die Gliederung sind international abgestimmt. Es gibt das EUROSTAT, das statistische Amt der Europäischen Union in Luxemburg, und da fahren meine Kollegen hin. Der für die Verbraucherpreise zuständige Referatsleiter verbringt dort einen gehörigen Teil seiner Arbeitszeit.

Karsten Schwanke: *Und was können Sie uns jetzt verraten über die Preisentwicklung bei der Euro-*Umstellung *in den anderen Euro-Ländern? Gab es dort auch einige Ausreißer?*

Jürgen Chlumsky: Es gab auch Ausreißer und auch auf ähnlichen Gebieten. Es fällt auf, dass auch der Dienstleistungssektor in anderen Ländern betroffen ist. Aber lassen Sie sich das ruhig auch mal sagen bei der Gelegenheit: Die öffentliche Aufregung ist in anderen Ländern sehr viel geringer als bei uns!

vgl. hierzu nun:

Statistisches Bundesamt: *Fast 10 Jahre Euro – Preisentwicklung vor und nach der Bargeldumstellung*, 2011

erhältlich unter: www.destatis.de/DE/Publikationen/Thematisch/Preise/Verbraucherpreise/Fast10JahreEuro5611105119004.pdf?__blob=publicationFile

(2) Wie wird das ifo Geschäftsklima ermittelt?

Das ifo Geschäftsklima ist ein vielbeachteter monatlich veröffentlichter Frühindikator für die konjunkturelle Entwicklung Deutschlands. Er basiert auf ca. 7 000 monatlichen Meldungen von Unternehmen der Gewerblichen Wirtschaft mit den Sektoren (1) Verarbeitendes Gewerbe, (2) Bauhauptgewerbe, (3) Großhandel und (4) Einzelhandel.

Die Unternehmen werden gebeten, ihre gegenwärtige Geschäftslage in einer Dreierskala zu beurteilen und ihre Geschäftserwartungen für die nächsten sechs Monate mitzuteilen. Sie können ihre **Lage** X mit „gut“, „befriedigend“ oder „schlecht“ und ihre **Erwartungen** Y als „günstiger“, „gleichbleibend“ oder „ungünstiger“ kennzeichnen. Die Antworten werden entsprechend der Firmengröße gewichtet und zu zwei **Salden** aggregiert:

$$\text{Lage} := \sum_i g_i\, x_i \;, \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{l} x_i = 1 \\ x_i = 0 \\ x_i = -1 \end{array}$$

je nachdem, ob die Antwort der Firma i gut, befriedigend oder schlecht ist

$$\text{Erwartungen} := \sum_i g_i\, y_i \;, \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{l} y_i = 1 \\ y_i = 0 \\ y_i = -1 \end{array}$$

je nachdem, ob die Antwort der Firma i „günstiger“, „gleichbleibend“ oder „ungünstiger“ ist.

Als Gewichte g_i dienen die jeweiligen Umsatzanteile am Gesamtumsatz in Prozent

$$g_i = \frac{\text{Umsatz}_i}{\text{Gesamtumsatz}} \cdot 100 \,.$$

Der Saldowert der Geschäftslage ist also die Differenz der Prozentanteile der Antworten „gut“ und „schlecht“, der Saldowert der Erwartungen ist die Differenz der Prozentanteile der Antworten „günstiger“ und „ungünstiger“.

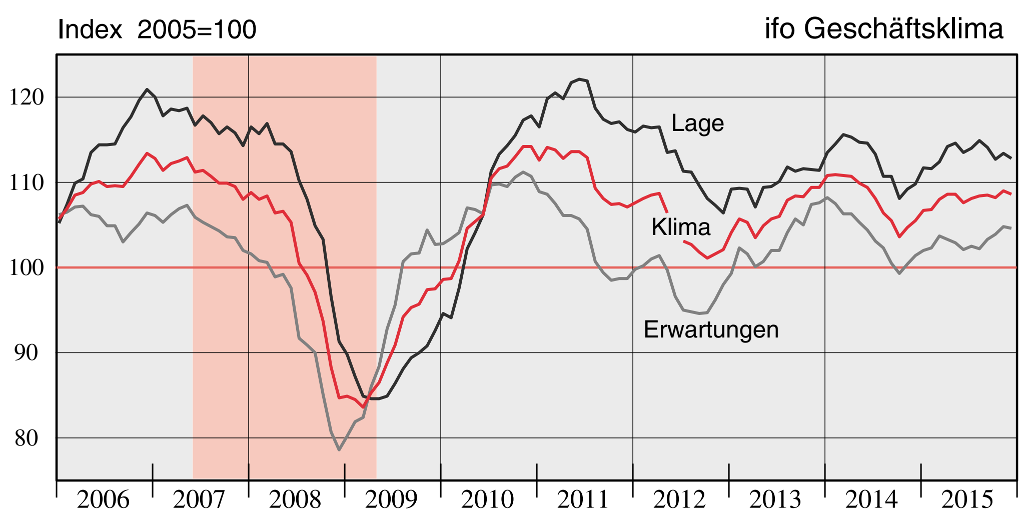

BILD 6.4 Der ifo Geschäftsklima-Index und die Finanzmarktkrise

Schätzen zum Beispiel gewichtete 40% ihre Geschäftslage als befriedigend ein, 35 % als gut und 25 % als schlecht, so beträgt der Saldo Lage = 35 – 25 = 10. Die Antwortenden, die ihre Lage befriedigend sehen, sind gewissermaßen "neutral" und beeinflussen das Ergebnis der aggregierten Lageeinschätzung nicht. Analog vollzieht sich die Berechnung der Geschäftserwartungen.

Der Saldo kann theoretisch zwischen den Extremwerten –100 (d.h. alle Firmen antworten negativ) und +100 (d.h. alle antworten positiv) schwanken:

$$-100 \leq \text{Lage} \leq +100 \qquad \text{und} \qquad -100 \leq \text{Erwartungen} \leq +100$$

Aus der Lage und den Erwartungen wird der ifo Geschäftsklima-Saldo für den betreffenden Berichtsmonat als geometrisches Mittel gebildet. Da dieses bei negativen Einzelwerten nicht erklärt ist, wird die Skala um +200 verschoben und man definiert

$$\text{Geschäftsklima} := \sqrt{(\text{Lage} + 200) \cdot (\text{Erwartungen} + 200)} - 200 \; .$$

Zur Berechnung der **Indexwerte** des Geschäftsklimas und der beiden Komponenten Geschäftslage und Erwartungen werden die Salden wiederum um 200 erhöht und auf den Durchschnitt eines Basisjahres (derzeit 2005) normiert, gemäß der Formel

$$\text{Index} := \frac{\text{Saldo im Berichtsmonat} + 200}{\text{durchschnittlicher Saldo im Basisjahr} + 200} \cdot 100 \; .$$

Im BILD 6.4 ist die Wirkung der Finanzmarktkrise auf die Einschätzungen und Erwartungen der Unternehmen überdeutlich zu erkennen. Der Geschäftsklima-Index sinkt auf sein bisheriges Allzeittief von 83.6 im März 2009, die Geschäftserwartungen sogar auf 78.6.

ERGÄNZENDE LITERATUR

Allen, R. G. D.: *Index Numbers in Economic Theory and Practice*, Chicago: Aldine Pub, 2008

Fahrmeir, L., R. Künstler, I. Pigeot & G. Tutz, G.: *Statistik: Der Weg zur Datenanalyse*, 7. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2010, Kapitel 3

Neubauer, Werner: *Preisstatistik*, München: Vahlen, 1996

Wewel, Max C., *Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL:* 3. Auflage, München: Pearson Studium, 2014, Kapitel 4

AUFGABEN

6.1 Wie können mögliche numerische Unterschiede zwischen PAASCHE- und LASPEYRES-Index erklärt werden, obwohl die Ausgangsdaten für die Berechnung gleich waren?

6.2 **Berechnung von Preisindizes**. Es werde ein Warenkorb mit vier Gütern herangezogen. Mengen und Preise sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	2010		2015	
Gut Nr.	Menge	Preis	Menge	Preis
1	10	40	10	60
2	10	30	8	45
3	5	20	25	30
4	25	80	5	120

a) Berechnen Sie einen Preisindex nach LASPEYRES für 2015 zur Basis 2010=100.

b) Berechnen Sie einen Preisindex nach PAASCHE für 2015 zur Basis 2010=100.

c) Falls die beiden Indizes verschieden sind: Begründen Sie, warum die Indizes voneinander abweichen.
Falls die beiden Indizes gleich sind: Erläutern Sie, warum die Indizes gleich sind, obwohl sich die Struktur des Warenkorbs geändert hat.

6.3 In der Periode $t = 1$ sind alle Preise um genau 5 % höher als in der Periode $t = 0$. Infolge einer Rezession sind jedoch gleichzeitig die gehandelten Mengen sämtlich um genau 5 % gesunken.

a) Berechnen Sie $P_1^{(L)}$ und $P_1^{(P)}$.

b) Unter welchen anderen, von der oben geschilderten Situation abweichenden Bedingungen könnte sich ein PAASCHE-Preisindex von einem LASPEYRES-Preisindex unterscheiden?

6.4 **Photoamateure.** Vom Verein der Photoamateure e.V. wurden folgende durchschnittliche Preise p und durchschnittlich vom gehobenen Digitalamateur konsumierte Mengen q mitgeteilt:

	2013		2014		2015		2016	
	q_0	p_0	q_1	p_1	q_2	p_2	q_3	p_3
Digitalcamera 25 MPix	0.2	727.–	0.2	690.–	0.3	550.–	0.3	390.–
Stativ	0.3	50.–	0.2	55.–	0.2	55.–	0.2	70.–
Speicherkarte	1	79.–	1	48.–	0.5	29.–	0	18.–
Color-Prints 13x18	90	1.–	110	0.85	140	–.27	150	–.37
Photobuch 32 Seiten	2	58.–	2	49.–	3	38.–	4	24.–

a) Berechnen Sie einen „Preisindex für Photoartikel (gehobener Amateurbedarf)" nach LASPEYRES zur Basis 2013=100.

b) Berechnen Sie eine entsprechende Index-Zeitreihe nach PAASCHE.

c) Zeichnen Sie die Charts der beiden Index-Zeitreihen in ein Diagramm.

d) Um wie viel Prozent/Jahr sind nun die Preise für Photoartikel von 2013 bis 2015 im Durchschnitt gestiegen oder gefallen? (Hinweis: Abschnitt **2.3**)

6.5 **Mittelwerte.** Bei der Berechnung von Preisindizes werden die Preise

$$p_{1t},\ p_{2t},\ \ldots,\ p_{nt}$$

der Periode t einer endlichen Anzahl n verschiedener Waren irgendwie „gemittelt". Dabei spielen die Mengen

$$q_{1t},\ q_{2t},\ \ldots,\ q_{nt}$$

der gehandelten Waren eine wichtige Rolle.

a) Um welche Art von Mittelwert handelt es sich, und welche Größen werden dabei gemittelt?

b) Wie lauten die Gewichte **(1)** beim PAASCHE-Index und **(2)** beim LASPEYRES-Index?

6.6 In einer Periode $t = 0$ seien LASPEYRES- und PAASCHE-Preisindex

$$P_0^{(L)} = P_0^{(P)} = 100\,.$$

In der Periode $t = 1$ seien nun alle Preise um genau 10% höher als in der Periode $t = 0$, die gehandelten Mengen jedoch mögen sich unterschiedlich verändert haben.

Können Sie $P_1^{(L)}$ und $P_1^{(P)}$ oder nur einen von beiden exakt angeben?

6.7 **Lebenshaltungskosten eines Studentenhaushalts**. Versuchen Sie, einen repräsentativen Warenkorb für die Berechnung eines Preisindex für die Lebenshaltungskosten eines „Ein-Personen-Studentenhaushalts mit niedrigem Einkommen" zu entwerfen. Der Einfachheit halber soll der Warenkorb nicht mehr als 20 Güter bzw. Dienstleistungen enthalten.

6.8 **a)** Berechnen Sie aus den Zahlen der Aufgabe **6.4** die Zeitreihen der Mengenindizes nach LASPEYRES und PAASCHE.

b) Warum unterscheiden sich die beiden Zeitreihen?

c) Wie sind sie zu interpretieren?

LÖSUNGEN

6.2 a) 150 b) 150

6.3 105; 105

6.4 a) 100, 84.64, 57.43, 44.52
b) 100, 85.76, 58,85, 43,61
d) –13.6%, –14.2%

6.6 110, 110

6.8 a) 100, 121.8, 148.2, 165.1
100, 122.0, 148.2, 166.1

Teil II

Wahrscheinlichkeitsrechnung

KAPITEL 7

Elementare Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Bildung von Zusammenstellungen von Elementen aus einer vorgegebenen endlichen Menge. Bei den Elementen der fraglichen Menge kann es sich um die verschiedensten Dinge handeln, etwa um Bücher, Buchstaben, Zahlen, einen Satz Lottokugeln oder Spielkarten.

Verschiedene kombinatorische Modelle stellen die **Anzahl der möglichen Zusammenstellungen**, die man aus den Elementen der Menge bilden kann, fest. Dabei ist zu unterscheiden, ob für die Zusammenstellung alle Elemente der Menge verwendet werden oder nur ein Teil. Im ersten Fall sprechen wir von ***Permutationen***, im zweiten Fall von ***Kombinationen***.

Im folgenden Kapitel **8** werden wir sehen, wie man in bestimmten Fällen Wahrscheinlichkeiten durch Auszählen von Möglichkeiten ermitteln kann. Dazu werden die kombinatorischen Modelle nützlich sein. In Kapitel **11** verwenden wir sie auch als **Stichprobenmodelle**, also dazu, die möglichen Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit zu untersuchen.

7.1 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Fakultäten und Binomialkoeffizienten sind Hilfsmittel zur übersichtlicheren Darstellung der kombinatorischen Modelle.

Definition: Das Symbol $n!$ bezeichnet das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n \tag{7-1}$$

und heißt n–***Fakultät***. Zusätzlich ist festgelegt

$$0! := 1 .$$

Die Fakultäten können auch anders, nämlich rekursiv, definiert werden mit

$$\begin{aligned} 0\,! &:= 1 \\ (n+1)\,! &:= n\,!\cdot(n+1)\,. \end{aligned} \tag{7-2}$$

Beispiele [1] für Fakultäten:

$$\begin{aligned} 1\,! &= 1 \\ 2\,! &= 1\cdot 2 = 2 \\ 3\,! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 4\,! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24 \\ 5\,! &= 4\,!\cdot 5 = 120 \\ &\vdots \\ 10\,! &= 3\,628\,800 \\ 20\,! &= 2.432902008\cdot 10^{18} \\ 30\,! &= 2.652528598\cdot 10^{32}\,. \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Fakultäten enorm schnell ansteigen. So versagen ungefähr bei $60\,!$ bereits die meisten Taschenrechner. Einen guten Näherungswert für $n\,!$ liefert die STIRLING-Formel[1]:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n =: \mathrm{St}(n)\,. \tag{7-3}$$

Dabei ist e die EULERsche Zahl[2] ($\mathrm{e} = 2.71828183\ldots$), eine irrationale reelle Zahl, die in der Mathematik eine große Bedeutung hat. Zwar nimmt der absolute Fehler der STIRLING–Formel für größer werdende n zu und wächst für $n \to \infty$ sogar über alle Grenzen. Es gilt einerseits

$$\left|n! - \mathrm{St}(n)\right| \to \infty\,,$$

aber andererseits

$$\frac{n!}{\mathrm{St}(n)} \to 1\,,$$

das heißt, der *relative* Fehler nimmt ab. An der STIRLING-Formel sieht man, dass die Fakultäten schneller ansteigen als jede Exponentialfunktion.

---

1 JAMES STIRLING, 1692–1770, englischer Mathematiker, genannt STIRLING THE VENETIAN, weil er aus Oxford davongejagt wurde und in Venedig studieren musste. Die Formel ist nach ihm benannt, weil er sie benutzt hat, jedoch stammt sie in Wirklichkeit von ABRAHAM DE MOIVRE (vgl. Fußnote zu Abschnitt **11.9**).

2 LEONHARD EULER, siehe Fußnote in Kapitel **12**.

Definition: Der ***Binomialkoeffizient*** $\binom{n}{k}$,

sprich „n über k“, ist für ganze $n > 0$, ganze $k \geq 0$ und $n \geq k$ definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad . \tag{7-4}$$

Bei der praktischen Berechnung der Binomialkoeffizienten – sei es von Hand oder mit dem Computer – empfiehlt es sich, nicht Zähler und Nenner getrennt auszurechnen, sondern vorher soviel wie möglich zu kürzen. Das ist einfacher, und man vermeidet dadurch zu große Zahlen und Rundungsfehler. Grundsätzlich kommen die Faktoren von $k!$ beziehungsweise von $(n-k)!$ im Nenner jedes Binomialkoeffizienten im Zähler bereits vor, so dass viel weggekürzt werden kann. Nehmen wir etwa den Binomialkoeffizienten

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4!\;5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \;\cdot\; 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1},$$

bleibt nach dem Kürzen von 5! nur noch der Ausdruck

$$\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

übrig: Im Zähler stehen als Faktoren die vier natürlichen Zahlen von 9 abwärts und im Nenner die vier natürlichen Zahlen von $4!$. Auf diese Weise lassen sich viele Binomialkoeffizienten auch von Hand schnell ausrechnen.

Beispiele [2]

$$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 49\cdot 2\cdot 47\cdot 46\cdot 3\cdot 22$$

$$= 13\,983\,816$$

$$\binom{37}{3} = \frac{37\cdot 36\cdot 35}{3\cdot 2\cdot 1} = 37\cdot 6\cdot 35 = 7770\,.$$

Die Binomialkoeffizienten heißen so, weil sie die Koeffizienten der bekannten binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

sind.

Die Binomialkoeffizienten lassen sich besonders schön im sogenannten PASCALschen Dreieck[1] darstellen:

$$
\begin{array}{lc}
n = 0: & 1 \\
n = 1: & 1 \quad 1 \\
n = 2: & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 3: & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4: & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5: & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
n = 6: & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
n = 7: & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
n = 8: & 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
n = 9: & 1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
\vdots & \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$

BILD 7.1 Binomialkoeffizienten im PASCALschen Dreieck

Hierin steht zum Beispiel der Binomialkoeffizient

$$\binom{7}{3} = 35$$

an der 4. Stelle in der Zeile für $n = 7$. Jeder Koeffizient im Inneren des PASCALschen Dreieck kann rekursiv berechnet werden: Er ist gerade die Summe der beiden unmittelbar darüberstehenden Koeffizienten gemäß der Formel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{7-5}$$

[1] BLAISE PASCAL, 1623–1662, französischer Mathematiker, Physiker, Religionsphilosoph und Dichter. Als 18-Jähriger baute er die erste Rechenmaschine, um seinem Vater, der Steuerinspektor war, die umfangreichen Rechenaufgaben zu erleichtern. Er erfand auch das Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

Copyright