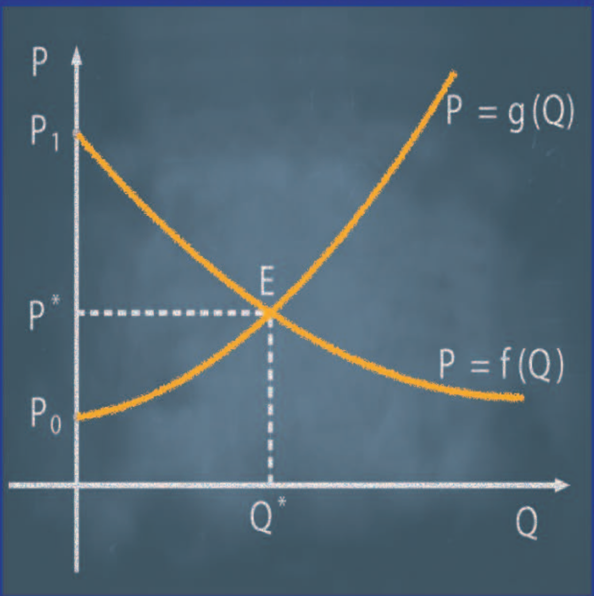
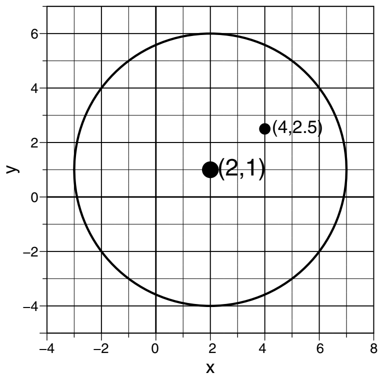


Fred Böker

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Das Übungsbuch

2., aktualisierte Auflage



Sie, dass die in a) gefundenen Lösungen die notwendigen Bedingungen erfüllen. Geben Sie jeweils den zugehörigen Wert des Lagrange-Multiplikators an.

c) Begründen Sie, dass Sie die globalen optimalen Punkte gefunden haben.

14.6 Zusätzliche Variablen und zusätzliche Nebenbedingungen

[1] Die Funktion $x^2 + y^2 + z^2$ besitzt unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 0$ und $2x - y + z = 14$ ein Minimum an der Stelle $(x, y, z) = (4, -5, 1)$. Bestimmen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_1 und λ_2, wobei λ_i für $i = 1, 2$ die zur i-ten Nebenbedingung gehörigen Lagrangeschen Multiplikatoren sind.

[2] Maximieren Sie die Funktion $x + 2z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $y^2 + z = \frac{1}{2}$. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum erfüllt sind und berechnen Sie die Koordinaten (x^*, y^*, z^*) des Maximumpunktes sowie die Werte der Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_i,\ i = 1, 2$.

[3] Die Zielfunktion $f(x, y, z) = x+y+z^2$ soll unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2 = 1$ optimiert werden. Bestimmen Sie alle Lösungskandidaten.

[4] Betrachten Sie das Problem max(min) $x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 30$ und $x - y - z = 10$. Die notwendigen Bedingungen werden von genau einem Punkt (x^*, y^*, z^*) erfüllt. Bestimmen Sie diesen Punkt und die zugehörigen Werte der Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2. Löst dieser Punkt das Maximierungs- oder Minimierungsproblem?

[5] Bestimmen Sie den Maximumpunkt von $f(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16$.

[6] Bestimmen Sie den einzigen Lösungskandidaten für das Problem max(min) $x^2 + xy + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 10$ und $x = 2y$, indem Sie es auf ein zweidimensionales Optimierungsproblem mit einer Nebenbedingung vereinfachen. Dieser Kandidat löst eins der beiden Probleme. Welches Problem kann es dann nur sein?

[7] Das Optimierungsproblem max(min) $4x^2 + 2y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x + 2y + 2z = 100$ und $x - y + z = 80$ hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie diese einschließlich der Werte der Lagrange-Multiplikatoren. Welches Problem wird gelöst, das Maximierungs- oder Minimierungsproblem?

[8] Ein Unternehmen produziert drei verschiedene Güter A, B und C. Der Gewinn aus der Produktion und dem Verkauf von x Einheiten des Gutes A, y Einheiten des Gutes B und z Einheiten des Gutes C ist $G(x, y, z) = -\frac{1}{300}x^2 + 8x - \frac{3}{125}y^2 + 48y + 24z - 5\,000$. Da alle drei Produkte auf einer Maschine gefertigt werden, liegt eine Kapazitätsbeschränkung in der folgenden Form vor: $x + 4y + 6z = 3\,300$. Bestimmen Sie den einzig möglichen Kandidaten zur Lösung dieses Problems.

14.7 Komparative Statik

[1] Ein Unternehmen benutzt K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeit, um $F(K, L)$ Einheiten eines Gutes herzustellen. Die Preise pro Einheit seien r und w für Kapital bzw. Arbeit. Die Kostenfunktion $C = rK + wL$ soll unter der Nebenbedingung $F(K, L) = Q$ minimiert werden. Bestimmen Sie die partielle Ableitung der Minimal-Kostenfunktion $C^*(r, w, Q)$ bezüglich Q.

[2] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$, d.h. die Funktion wird auf einer abgeschlossenen beschränkten Menge betrachtet und nimmt somit Maximum und Minimum an.

a) Bestimmen Sie alle Extrempunkte mit den zugehörigen Extremwerten und den zugehörigen Werten von λ.

b) Die Nebenbedingung wird geändert in $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1.02$. Geben Sie die angenäherte Änderung der Extremwerte an.

[3] Die Funktion $f(x, y, z) = e^x + y + z$ wird unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ maximiert durch $(x^*, y^*, z^*) = (1, 0, 0)$. Geben Sie die angenäherte Änderung des Maximalwertes der Zielfunktion f an, wenn die Nebenbedingungen durch $x + y + z = 1.02$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 0.98$ ersetzt werden.

[4] In einem multivariaten Optimierungsproblem mit zwei Nebenbedingungen ergibt sich im Optimum $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 15$. Die Ressourcen, d.h. die Konstanten in beiden Nebenbedingungen werden jeweils um eine Einheit erhöht. Um wieviel steigt dann ungefähr der Optimalwert der Zielfunktion?

[5] Der Nutzen durch den Kauf der Mengen x_1, x_2 bzw. x_3 der drei Güter G_1, G_2 bzw. G_3 sei gegeben durch $U(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 - 6) + 2\ln(x_2 - 5) + \ln(x_3 - 4)$. Die Kosten pro Einheit für jedes dieser drei Güter seien 1 Euro. Insgesamt haben Sie für den Kauf dieser drei Güter 36 Euro zur Verfügung, d.h. die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2, x_3)$ soll unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 36$ maximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Mengen x_1^*, x_2^* und x_3^*, die den Nutzen maximieren. (Hinweis: Es ist möglich auch Bruchteile einer Einheit zu erwerben. Untersuchen Sie nur die notwendigen Bedingungen).

b) Um wieviel steigt der maximale Nutzen ungefähr, wenn Sie 37 Euro statt 36 Euro zur Verfügung haben?

14.8 Nichtlineare Programmierung: Ein einfacher Fall

[1] Die Funktion $x^2 - y^2 + y$ soll unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$ maximiert werden. Ermitteln Sie mit Hife der Kuhn-Tucker-Bedingungen alle möglichen Kandidaten (x^*, y^*) für die Lösung dieses Problems. Bestimmen Sie auch die zugehörigen Werte von λ.

[2] Bestimmen Sie die einzige mögliche Lösung des Problems $\max 5x + y$ unter der Nebenbedingung $10 \geq x^2 + y + x$.

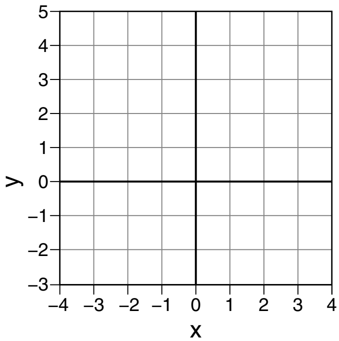
[3] Das Maximierungsproblem $\max \sqrt{x} + \sqrt{y}$ unter der Nebenbedingung $10x + 5y \leq 150$ hat genau eine Lösung (x^*, y^*) mit $x^* > 0$ und $y^* > 0$. Bestimmen Sie diese.

[4] Bestimmen Sie den einzig möglichen Lösungskandidaten (x^*, y^*) und das zugehörige λ für das Problem $\max\ 8x + 9y$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + 9y^2 \leq 100$.

[5] Bestimmen Sie den einzig möglichen Lösungskandidaten für das Maximum der Funktion $f(x, y) = 4 - \frac{1}{2}x^2 - 4y$ unter der Nebenbedingung $6x - 4y \leq 12$.

14.9 Mehrere Nebenbedingungen in Ungleichheitsform

[1] Die Funktion $2x^2 + 2y^2 - x$ soll unter den Nebenbedingungen $(x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 1$ und $\frac{3}{2}x \leq 0$ maximiert werden. Skizzieren Sie die zulässige Menge, d.h. die Menge der (x, y), die die Nebenbedingungen erfüllen.



[2] Betrachten Sie das Problem $\max\ 40a - 0.02a^2 + 36b - 0.03b^2$ unter den Nebenbedingungen $4a + 3b \leq 1\,950$ und $\left(\frac{a}{30}\right)^2 + \left(\frac{b}{50}\right)^2 \geq 100$. Bestimmen Sie die einzige Lösung (a^*, b^*) des Problems, wenn bekannt ist, dass der Lagrange-Multiplikator λ_1 für die erste Nebenbedingung größer als Null ist, während die zweite Ungleichung nicht bindend ist, d.h. $\left(\frac{a}{30}\right)^2 + \left(\frac{b}{50}\right)^2 > 100$.

[3] Das Maximierungsproblem $\max\ f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) \leq 5$ und $g_2(x, y, z) \leq 10$ habe die Lösung $x^* = 4$; $y^* = 2$; $z^* = 3$; $\lambda_1 = 12$; $\lambda_2 = 36$. Um wieviel ändert sich der Maximalwert der Zielfunktion ungefähr, wenn die Konstante in der zweiten Nebenbedingung in 10.2 geändert wird.

[4] Das Problem max $2x + y - \frac{1}{3}x^3 - xy - y^2$ unter den Nebenbedingungen $x \geq \frac{1}{4}$ und $x + y \leq 3$ hat genau eine Lösung (x^*, y^*), für die beide Nebenbedingungen nicht bindend sind. Bestimmen Sie die Lösung.

[5] Die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$ hat unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 16$ einen eindeutig bestimmten Minimumpunkt, der im Innern der zulässigen Menge liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten (x^*, y^*, z^*) dieses Minimumpunktes.

14.10 Nichtnegativitätsbedingungen

[1] Betrachten Sie das nichtlineare Programmierungsproblem min $(x - 3)^2 + (y - 3)^2$ unter der Nebenbedingung $\frac{1}{4}x + y \geq 10$ und der Nichtnegativitätsbedingung $x \geq 0$. Schreiben Sie die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen in der in (14.10.3 - 4) gegebenen Form und bestimmen Sie dann alle Lösungskandidaten mit dem zugehörigen Wert von λ.

[2] Bestimmen Sie den einzigen Lösungskandidaten (einschließlich der Werte der Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2) des Problems

$$\max \ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \ \begin{cases} x \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \end{cases} \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

[3] Das nichtlineare Optimierungsproblem max $xy - y - z^2$ unter $x + y^2 + z^2 \leq 2$ und $x \geq 0$ hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie zunächst alle Lösungskandidaten mit den zugehörigen Werten von λ, indem Sie eine geeignete Fallunterscheidung verwenden. Entscheiden Sie dann, welcher Kandidat das Problem löst.

Weitere Aufgaben zu Kapitel 14

[1] Bestimmen Sie jeweils alle Lösungskandidaten und auch λ:

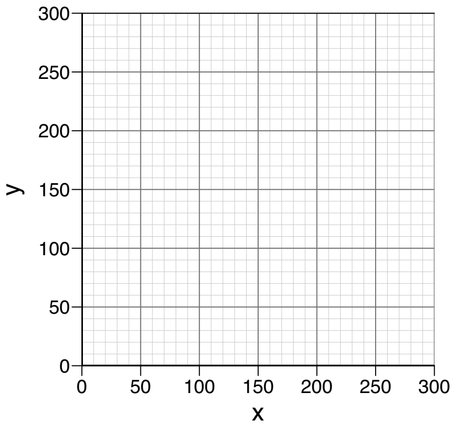
a) max(min) $x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 = 4$
b) min e^{-xy} unter der Nebenbedingung $x + y = 2$
c) max $z = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$

[2] Die Produktionsfunktion eines Unternehmens für die Herstellung eines Gutes sei gegeben durch $Q = F(x, y) = 10\sqrt{x}\sqrt{y}$. Dabei sind x und y die Mengen, die von den beiden Produktionsfaktoren A und B eingesetzt werden. Eine Einheit des Faktors A kostet 2 Geldeinheiten, eine Einheit des Faktors B kostet 8 Geldeinheiten. Es sollen 800 Einheiten bei minimalen Kosten produziert werden. Bestimmen Sie die optimalen Mengen x^* und y^*, die die Kosten unter der Nebenbedingung minimieren.

[3] Das Problem max $xz + yz$ unter $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ hat zwei Lösungen. Für beide Lösungen hat der Lagrangemultiplikator denselben Wert $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die beiden Lösungen und λ.

[4] Das Problem max $x^2 + y^2 + x^2y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \le 1$ hat die Lösung $(x, y) = (\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3})$. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert des Lagrangemultiplikators λ.

[5] Die Nebenbedingungen in einem Optimierungsproblem seien $x + 2y \le 600$; $x - y \le 50$; $x \ge 0$; $y \ge 0$. Skizzieren Sie die zulässige Menge Z in der folgenden Abbildung.



[6] Bei der Optimierung einer Gewinnfunktion $\pi(x_1, x_2)$ bei der Produktion von zwei Gütern unter drei Nebenbedingungen (Ressourcenbeschränkungen) ergibt sich als Lösung $x_1^* = 5$; $x_2^* = 22$; $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 10$. Um wieviel ändert sich der maximale Gewinn ungefähr, wenn von jeder der drei Ressourcen eine Einheit mehr zur Verfügung steht?

[7] Ein Unternehmen setzt K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeit ein, um $Q = F(K, L)$ Einheiten eines Gutes zu produzieren. Die Kosten für Kapital und Arbeit pro Einheit seien r bzw. w. Die Kostenfunktion $C = rK + wL$ wird unter der Nebenbedingung $F(K, L) = Q$ minimal für $K^* = 50$ und $L^* = 60$. Nehmen Sie an, dass die Kosten r für Kapital um 0.6 Geldeinheiten fallen, während die Kosten für Arbeit um 0.4 Geldeinheiten steigen. Um ungefähr wie viele Einheiten **steigen** oder **fallen** die minimalen Kosten?

Matrizen und Vektoralgebra

15

ÜBERBLICK

15.1 Systeme linearer Gleichungen

[1] Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme, wenn möglich.

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$
b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + y - z &= 4 \end{aligned}$
e) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$
f) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$

[2] Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen in den Variablen a, b, c und d linear sind und welche nicht. Vereinfachen Sie dabei zunächst die gegebenen Gleichungen.

a) $\dfrac{6ab}{b} + \dfrac{c^3 + dc^3}{7c^2} = 12$
b) $d + c + a + b = (b + c + d + a)^2$

c) $-\dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{b - a} = 6$, wobei $a \neq b$
d) $(a + c)(b + d)(a + d)(c + b) = 69$

15.2 Matrizen und Matrizenoperationen

[1] Berechnen Sie $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ und $2\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{B}$, wenn

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] Berechnen Sie $\mathbf{3A} - \mathbf{2B}$, wenn $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3a \\ a-2 & 1 \end{pmatrix}$.

15.3 Matrizenmultiplikation

[1] Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$, wenn sie definiert sind.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

[2] Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen x_1, x_2 und x_3 sei in Matrixform gegeben durch $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, wobei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie die drei Gleichungen des Gleichungssystems in der üblichen Form auf.

[3] Schreiben Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrixform, d.h. in der Gestalt $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + \ \ x_2 &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

15.4 Regeln für die Matrizenmultiplikation

[1] Betrachten Sie die Matrizen $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -13 & 14 & -15 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von a, b und c gilt $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{I}_3$, wobei $\boldsymbol{I}_3$ die Einheitsmatrix der Ordnung 3 sei.

[2] Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\boldsymbol{A}^2$; $\boldsymbol{A}^3$ und $\boldsymbol{A}^3 - 2\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}$.

[3] Für welche Werte von a ist die Matrix $\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$ idempotent?

Hinweis: Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ ist idempotent, wenn $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

[4] Es werden drei Güter G_j aus vier Rohstoffen hergestellt. Die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ enthält in der j-ten Spalte den Verbrauchsvektor für das Gut j. Zum Beispiel für die Herstellung einer Einheit des Gutes G_1 werden 2 Einheiten von R_1, 1 Einheit R_2, 3 Einheiten R_3 und 2 Einheiten R_4 gebraucht (die Zahlen stehen in der ersten Spalte). Der Vektor $\boldsymbol{x}$ gibt an, wie viele Einheiten der Güter G_j hergestellt werden. Berechnen Sie den Bedarf der Rohstoffe. Schreiben Sie das Ergebnis als Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & G_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

[5] Die Produkte P_i eines Unternehmens werden in den Ländern L_j verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen V_{ij} für jedes Produkt und Land sind in der Matrix $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Umsatzziele sind im Vektor $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix}$ gegeben. Wie hoch müssen die Preise (p_1, p_2, p_3) gewählt werden, um die gesteckten Umsatzziele zu erreichen?

15.5 Die transponierte Matrix

[1] Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(\boldsymbol{AB})'$ auf zwei unterschiedliche Arten.

[2] Berechnen Sie $\boldsymbol{AA}'$ und $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, wenn $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

[3] Bestimmen Sie $(3\boldsymbol{A})'$, wenn $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2a^2-2) \\ 3-a & 7 & 6-a^2 \\ a^2+1 & a & 4 \end{pmatrix}$, wobei a eine Konstante ist. Gibt es ein a, so dass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$?

[4] Für welche Werte von a und b ist die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a^2+2 & 6 \\ 4a-2 & 2b & b^2-1 \\ a-4b & 0 & -2 \end{pmatrix}$ symmetrisch?

[5] Für das Produkt der Matrizen $\boldsymbol{A}_{4\times 3}$ und $\boldsymbol{B}_{3\times 2}$ gelte $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Matrizenprodukt $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

15.6 Gauß'sche Elimination

[1] Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Wenden Sie auf das Gleichungssystem so lange elementare Zeilenumformungen an, bis Sie eine Treppenstufenform erhalten, d.h. die Koeffizienten der führenden Einträge sollen 1 sein und unterhalb der führenden Einträge sollen Nullen stehen. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden. Schreiben Sie das Gleichungssystem zunächst in Treppenstufenform auf und dann für dieses Stadium die entsprechende Matrixform $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Geben Sie dann die Lösung an.

a)
$$\begin{aligned} -2x + 4y - 2z &= -2 \\ -3x + y + 2z &= -5 \\ -7y + 4z &= 23 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 4 \\ 2y - z &= -5 \\ 4x - 2y - 6z &= 2 \end{aligned}$$

[2] Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, indem Sie die zu diesem Gleichungssystem gehörende erweiterte Koeffizientenmatrix bilden und diese auf Treppenstufenform bringen, d.h. die Koeffizienten der führenden Einträge sollen 1 sein und unterhalb der führenden Einträge sollen Nullen stehen. Oberhalb der führenden Einträge sollen noch keine Nullen erzeugt werden. Schreiben Sie dann das zu diesem Stadium gehörende Gleichungssystem auf und geben Sie die Lösung an.

a)
$$\begin{array}{rcrl} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 9 & \text{(i)} \\ 20x_1 + 13x_2 + 17x_3 & = & 50 & \text{(ii)} \\ 8x_1 + 4x_2 + 8x_3 & = & 20 & \text{(iii)} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrl} x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 8 & \text{(i)} \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 4 & \text{(ii)} \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 & \text{(iii)} \end{array}$$

[3] Fassen Sie die folgenden Matrizen als erweiterte Koeffizientenmatrizen eines linearen Gleichungssystems auf. Falls das Gleichungssystem eine Lösung hat, so formen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix weiter um, bis Sie auch über den führenden Einträgen Nullen erhalten haben. Geben Sie dann die Lösung an (siehe (15.6.1 - 3)).

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

[4] Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme, indem Sie nach (15.6.1 - 15.6.3) vorgehen.

a)
$$\begin{array}{rcr} x \phantom{{}+ y} - z & = & -5 \\ 3x + y - 3z & = & -12 \\ x + 2y - 2z & = & 6 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 & = & 5 \end{array}$$

15.7 Vektoren

[1] Bilden Sie für die Vektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ und $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$ das innere Produkt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, sowie die Matrizenprodukte $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'$. Was fällt Ihnen dabei auf?

[2] Sei $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$.

[3] Bestimmen Sie für die beiden Vektoren $\boldsymbol{x} = (2, 3, 6)$ und $\boldsymbol{y} = (1, -3, -2)$ die Linearkombination $3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$.

15.8 Geometrische Interpretation von Vektoren

[1] Bestimmen Sie die Länge oder Norm der Vektoren $\boldsymbol{a} = (2, 1, 2)$; $\boldsymbol{b} = (-2, 4, 1)$; $\boldsymbol{c} = (5, 3, 2)$ und $\boldsymbol{d} = (5, 7)$.

[2] Die linke Abbildung zeigt die Vektoren **a** und **b**. Konstruieren Sie in den nebenstehenden Grafiken die Vektoren **a** + **b** und **a** − **b**