



**ing**  
maschinenbau

Hendrik Kuhlmann

# Strömungsmechanik



Beachte, dass der Normalenvektor  $\mathbf{e}_n$  radial nach innen zeigt (zum Zentrum des Krümmungskreises). Der Druckgradient  $\partial p / \partial n$  ist daher radial nach innen zu verstehen. Gleichung (4.30) drückt somit das Gleichgewicht aus zwischen der nach innen gerichteten radialen Druckkraftdichte  $-\partial p / \partial n$  und der nach außen gerichteten Zentrifugalkraftdichte  $\rho u^2 / R$ .

Da die linke Seite von (4.30) immer positiv ist, muss der Druck radial nach außen hin zunehmen. Die Zunahme ist umso stärker, je stärker die Krümmung der Stromlinien ist ( $R \rightarrow 0$ ). Bei einer geradlinigen, reibungsfreien Strömung ( $R \rightarrow \infty$ ) kann es also keinen Druckgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung geben.

Die Bernoulli-Gleichung (4.21) und die Impulsbilanz (Kräfte) senkrecht zur Stromlinie (4.30) kann man auch direkt aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ableiten (siehe z. B. Oertel jr. & Böhle 2002). Hier haben wir sie durch die Projektion der Euler-Gleichung berechnet, denn die Euler-Gleichung enthält schon die gesamte Information über die Impulsänderung. Die Zentrifugalkraft ergibt sich hier automatisch aus der Geometrie der Stromlinie und muss nicht erst als Kraft in der Newtonschen Gleichung angesetzt werden.



Henri Marie Coandă  
1886–1972<sup>†</sup>

Ein Phänomen, bei dem der Druckabfall senkrecht zu den gekrümmten Stromlinien wichtig ist, ist der *Coandă-Effekt*. Damit bezeichnet man die Tendenz eines Strahls, der tangential zu einer Körperoberfläche strömt, auch konvexen Körperkonturen zu folgen und sich an die Oberfläche des Körpers anzulegen. Durch die gekrümmten Stromlinien entsteht ein Unterdruck an der festen Oberfläche, wodurch der Körper eine entsprechende Kraft erfährt. Entscheidend ist dabei, dass es sich um einen Strahl handelt. Denn in einer homogenen Strömung wird der Druck auf den Körper im wesentlichen durch die Beschleunigung und Verlangsamung der Strömung aufgrund der Kontur des Körpers (Massenerhaltung) verursacht und die Strömung separiert eher von der Oberfläche (siehe auch Abschnitt 7.4.3) als bei einem tangentialen Strahl.

## 4.3 Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung bzw. der Gleichungen für einen Stromfaden kann man verschiedene wichtige Aussagen über reibungsfreie Strömungen erhalten, ohne dass man das Geschwindigkeitsfeld explizit kennen muss. Es werden oft nur die (mittleren) Geschwindigkeiten am Ein- und am Auslaß einer Stromröhre benötigt.

### 4.3.1 Bernoulli-Konstante für eine homogene Anströmung

Bei der Anströmung eines Körpers ist das Geschwindigkeitsfeld weit weg vom Körper meist homogen  $\mathbf{u} = u_\infty \mathbf{e}_x$ . In der Nähe des Körpers werden die Stromlinien jedoch gekrümmt sein (► Abb. 4.4). Wir betrachten zunächst die Impulsbilanz senkrecht zu den Stromlinien für eine stationäre inkompressible Strömung. Für einen weit entfernten Punkt ( $x \rightarrow -\infty$ ) ist der Krümmungsradius für jede Stromlinie  $R = \infty$  und

<sup>†</sup>Mit freundlicher Genehmigung von Patrick Flanagan, <http://www.phisciences.com>.

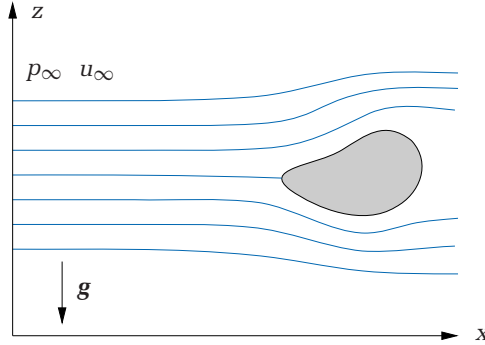


Abb. 4.4: Stromlinien um einen homogen angeströmten Körper.

die Normalenrichtung ist  $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$  (positive Vertikalrichtung). Mit  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f} = -g$  erhalten wir aus (4.29)

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial z} - g. \quad (4.31)$$

Nach Integration ergibt sich ( $\rho = \text{const.}$ )

$$p_\infty + \rho g z_\infty = C', \quad (4.32)$$

wobei  $C'$  eine *globale* Konstante ist und  $z_\infty = z(x \rightarrow -\infty)$  die  $z$ -Koordinate der jeweiligen Stromlinie für  $x \rightarrow -\infty$ . Da  $\rho u_\infty^2/2$  eine Konstante ist, können wir diesen Term auf beiden Seiten addieren, was auf

$$\rho \frac{u_\infty^2}{2} + p_\infty + \rho g z_\infty = C' + \underbrace{\rho \frac{u_\infty^2}{2}}_{=\text{const.}} := C \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} \rho \frac{u^2}{2} + p + \rho g z \quad (4.33)$$

führt, wobei auch  $C$  eine globale Konstante ist. Damit ist  $C$  für *jede* Stromlinie konstant, unabhängig von der  $z$ -Koordinate, von der sie im Unendlichen ausgeht.

### 4.3.2 Strömung längs einer festen Wand

Um Informationen über eine Strömung zu erhalten, kann man den Druck an der Oberfläche fester Körper mit Hilfe feiner Anbohrungen messen (► Abb. 4.5). Bei reibungsfreien Fluiden würde dies kein Problem darstellen, da sich der Druck an der Oberfläche des Körpers entsprechend der Tangentialgeschwindigkeit einstellt. Bei Strömungen realer viskoser Fluide muss jedoch die Geschwindigkeit an der Körperoberfläche verschwinden, da ein viskoses Fluid an der Oberfläche eines festen Körpers haftet. Wenn die äußere Strömung sehr schnell ist, existiert um einen schlanken Körper eine dünne *Grenzschicht*, innerhalb der die Geschwindigkeit vom Wert  $u_\infty$  in der freien Strömung bis auf den Wert Null an der Oberfläche des Körpers abfällt. Unter diesen Bedingungen kann man zeigen (siehe Abschnitt 7.4.1), dass sich der statische Druck in der schnellen äußeren Strömung nahezu ungestört bis auf die Oberfläche des Körpers fortpflanzt. Daher *sieht* die Öffnung der Anbohrung den statischen Druck  $p$ , der in der freien Strömung über der Anbohrung herrscht. Die Anbohrung muss jedoch

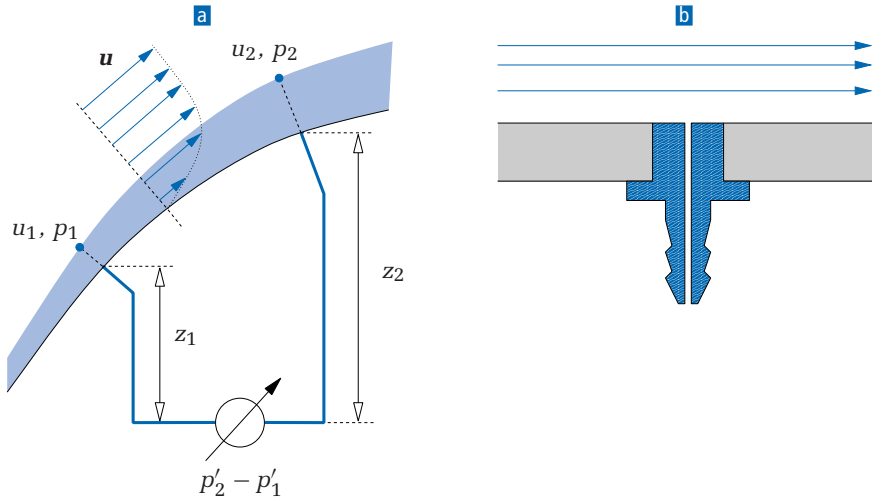


Abb. 4.5: **a** Messung der Differenz dynamischer Drücke. Die Grenzschicht (hellblau) ist übertrieben dick dargestellt. **b** Technische Ausführung einer Druckbohrung.

sehr exakt (ohne Grat und Facette) und senkrecht zur Wand ausgeführt sein, da sonst die Messung verfälscht wird.

Wenn man zwei derartige Bohrungen, deren Durchmesser meist zwischen 0.2 und 0.8 mm liegt, an ein Manometer anschließt, mißt man die Differenz der Drücke  $p'_1$  und  $p'_2$  (► Abb. 4.5). Sie sind gegenüber den statischen Drücken in der Strömung um den hydrostatischen Druck in den Zuleitungen erhöht

$$p'_1 = p_1 + \rho g z_1, \quad (4.34a)$$

$$p'_2 = p_2 + \rho g z_2. \quad (4.34b)$$

Nach der Bernoulli-Gleichung (4.21) entlang einer Stromlinie in Wandnähe, aber außerhalb der Grenzschicht, gilt nun

$$\rho \frac{u_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 = \rho \frac{u_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1. \quad (4.35)$$

Der am Manometer abgelesene Differenzdruck ist also

$$p'_2 - p'_1 = p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) = \frac{\rho}{2} (u_1^2 - u_2^2). \quad (4.36)$$

Das Manometer mißt daher genau die (negative) Differenz der dynamischen Drücke. Diesen Sachverhalt kann man zur Messung der Geschwindigkeitsänderung nutzen.

### 4.3.3 Venturi-Rohr

Wir betrachten die Strömung durch ein Rohr mit einer Verengung. Ein derartiges Rohr nennt man Venturi-Rohr (► Abb. 4.6). Wenn wir die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten betrachten, gilt aufgrund der Massenerhaltung (4.3) für die Punkte (0) im

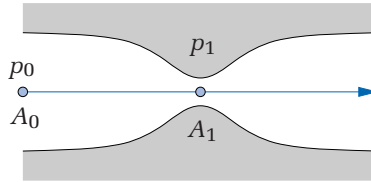


Abb. 4.6: Venturi-Rohr und zentrale Stromlinie.

Bereich ohne Verengung und (1) an der engsten Stelle für ein inkompressibles Fluid ( $\rho = \text{const.}$ )  $u_0 A_0 = u_1 A_1$ . Wenn wir diesen Wert für  $u_1$  in die Bernoulli-Gleichung einsetzen, erhalten wir ( $z = \text{const.}$ )



Giovanni Battista Venturi, 1746–1822

$$\frac{u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \stackrel{\text{Kont.}}{=} \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 \frac{u_0^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}. \quad (4.37)$$

Es folgt

$$u_0^2 = \frac{p_0 - p_1}{\frac{\rho}{2} \left[ \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 - 1 \right]}. \quad (4.38)$$

Mit  $A_0 > A_1$  ist  $p_0 > p_1$ . Durch Messung der Druckabsenkung an einer Verengung (zum Beispiel durch Druckbohrungen und Manometer) ist es also möglich, die Strömungsgeschwindigkeit  $u_0$  im Rohr zu messen, wenn man die Dichte des Fluids und die Querschnitte des Venturi-Rohres kennt.

Neben der Messung der Strömungsgeschwindigkeit findet das Prinzip des Venturi-Rohres auch überall dort Anwendung, wo mit Hilfe eines lokalen Unterdrucks Fluid durch eine Bohrung an der engsten Stelle angesaugt (Wasserstrahlpumpe) und mit dem Hauptstrom vermischt werden soll (z. B. in Vergasern).

#### 4.3.4 Prandtl'sches Staurohr

Wenn sich ein Körper in einem unbegrenzten Fluid mit konstanter Geschwindigkeit  $u_\infty$  bewegt oder ein ruhender Körper mit der homogenen Geschwindigkeit  $u_\infty$  angeströmt wird,<sup>12</sup> existiert eine Stromlinie, die an einem Punkt an der Vorderseite des Körpers endet (siehe ► Abb. 4.7). Dies ist der **Staupunkt** (Index 0). An ihm ist

<sup>12</sup> Wegen der Galilei-Invarianz der Euler-Gleichung sind beide Situationen äquivalent.

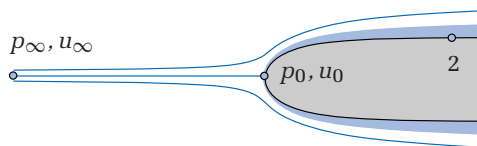


Abb. 4.7: Umströmung eines schlanken symmetrischen Körpers mit Stromlinien (blau), Grenzschicht (hellblau) und Staupunkt (Index 0).

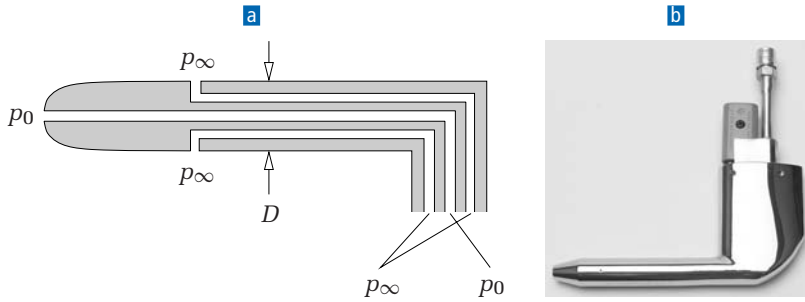


Abb. 4.8: a) Schnittskizze durch ein Prandtl-Rohr und b) Pitot-Rohr PH1100 im ausgebauten Zustand (mit freundlicher Genehmigung von Aero-Instruments Co., LLC).

$u = u_0 = 0$ . Wenn wir die Bernoulli-Gleichung auf diese Stromlinie anwenden, erhalten wir ( $u_0 = 0, z = \text{const.}$ )

$$\frac{u_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} . \quad (4.39)$$

Im Staupunkt ist der statische Druck identisch mit dem Gesamtdruck. Er wird **Staudruck**  $p_0$  genannt. Man kann ihn direkt durch eine Druckbohrung messen, die genau im Staupunkt liegt. Die Messung wird mit einem sogenannten **Pitot-Rohr**<sup>13</sup> durchgeführt (► Abb. 4.8b).

Die Anströmgeschwindigkeit ist nach (4.39)

$$u_\infty = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_\infty)}{\rho}} . \quad (4.40)$$

Wenn man neben  $p_0$  auch noch den statischen Druck  $p_\infty$  bestimmt, kann man die Anströmgeschwindigkeit  $u_\infty$  berechnen. Zur Bestimmung des statischen Drucks  $p_\infty$  kann man einen schlanken axisymmetrischen Körper, z. B. ein dünnes Rohr, verwenden und den statischen Druck im Punkt 2 messen (► Abb. 4.7). Denn für einen schlanken Körper ist in guter Näherung  $p_2$  gleich  $p_\infty$ , da die Geschwindigkeit im Punkt 2 näherungsweise der Anströmgeschwindigkeit entspricht:  $u_2 \approx u_\infty$ . Dies gilt nicht nur für reibungsfreie Strömungen, sondern auch für schnelle viskose Strömungen, bei denen sich der statische Druck ungestört durch die Grenzschicht fortpflanzt (vgl. Abschnitt 4.3.2 und 7.4.1).

Diese Idee ist im **Prandtschen Staurohr**<sup>14</sup> realisiert (► Abb. 4.8a). Da auch ein schlanker Körper das Fluid in einem gewissen Ausmaß verdrängt, wird das Fluid in der reibungsfreien Außenströmung in der Nähe der Nase des Körpers über  $u_\infty$  hinaus beschleunigt. Dieser Effekt verschwindet, je weiter die Druckbohrung von der Nase entfernt ist. Umgekehrt wird das Fluid zum Ende des schlanken Körpers aus Kontinuitätsgründen (und durch den Sondenhalter) unter  $u_\infty$  abgebremst. Erst hinter dem Körper wird dann wieder  $u_\infty$  erreicht. Die beiden gegenläufigen Effekte ( $u > u_\infty$  weit vorne und  $u < u_\infty$  weit hinten) kann man ausnutzen, um den Fehler der statischen

<sup>13</sup> Henri de Pitot (1695–1771).

<sup>14</sup> Das Prandtsche Staurohr wird in der angelsächsischen Literatur auch als Pitot-Rohr bezeichnet.

Druckmessung zu minimieren (Eckelmann 1997). Generell sollte der Krümmungsradius der Stromlinien möglichst groß sein. Typischerweise befindet sich die seitliche Bohrung zur Messung von  $p_\infty$  um  $3D$  stromabwärts vom Staupunkt, wobei  $D$  der Durchmesser des Prandtl-Rohres ist.

### 4.3.5 Verlustloses Ausströmen aus einem Behälter

#### Stationäres Ausströmen

Wir betrachten einen bis zur Höhe  $h$  mit einer Flüssigkeit gefüllten großen Behälter, aus dem am unteren Ende die Flüssigkeit durch eine kleine Öffnung austritt (► Abb. 4.9). Das Verhältnis der Querschnittsfläche der Austrittsöffnung zu derjenigen des Behälters sei sehr klein, so dass man den Füllstand  $h$  näherungsweise als konstant ansehen darf. Wenn wir die Bernoulli-Gleichung auf eine Stromlinie anwenden, die von der Oberfläche der Flüssigkeit ausgeht und durch die Austrittsöffnung führt (von 0 nach 1 in ► Abb. 4.9a), erhalten wir

$$\underbrace{\frac{u^2(z=h)}{2}}_{=0} + \frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{u^2(z=0)}{2} + \frac{p_0}{\rho} + 0. \quad (4.41)$$

Die Ausflußgeschwindigkeit beträgt also

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (4.42)$$

Dies ist die berühmte Formel von *Torricelli*, die er jedoch ohne Bernoullis Gleichung erhielt.<sup>15</sup> Die Ausflußformel (4.42) besagt, dass die potentielle Energie pro Masse  $gh$  vollständig in kinetische Energie umgesetzt wird. Durch eine vertikale Ausrichtung des Strahls kann man die potentielle Energie wiedergewinnen (► Abb. 4.9b). In (4.42) wurde der Druck in der Austrittsöffnung durch den Umgebungsdruck approximiert, was einer Vernachlässigung des Laplace-Drucks und der Stromlinienkrümmung entspricht.

In Realität schnürt sich der Strahl hinter der Öffnung etwas ein und der Strahldurchmesser nimmt kurz hinter der Öffnung ein Minimum an. Diese *Kontraktion*, auch *vena contracta* genannt, rührt daher, dass bei einem einfachen Loch in einer dünnen Wand die Fluidelemente radial auf das Loch zuströmen und hinter diesem nicht einfach in Richtung der Strahlachse umgelenkt werden können. Das Verhältnis der minimalen Strahlquerschnittsfläche  $A_{\min}$  im Vergleich zum Öffnungsquerschnitt  $A$  wird *Kontraktionsziffer* genannt. Ihr Wert beträgt



Evangelista  
Torricelli  
1608–1647

<sup>15</sup> Bernoulli (1700–1782) lebte nach Torricelli. Torricelli nahm an, dass der Flüssigkeitsstrahl durch einen nach oben gekrümmten Ausfluß wieder bis zur Höhe  $h$  aufsteigen würde (freier Fall eines Flüssigkeitselements entlang der Stromlinie, vgl. ► Abb. 4.9b). Dann kann er Newtons Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung verwenden

$$u = gt \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \frac{u^2}{g},$$

woraus (4.42) folgt.



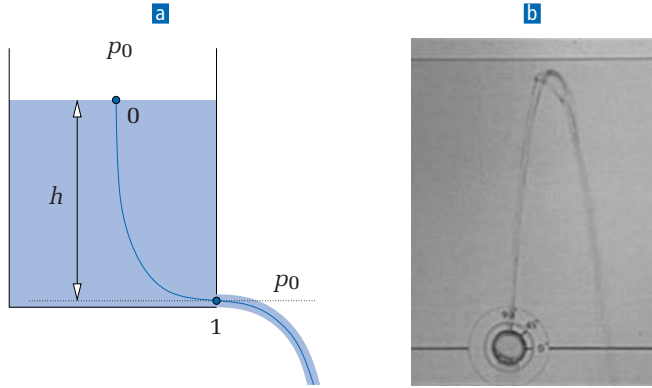


Abb. 4.9: **a** Ausfluß aus einem Behälter mit einer einfachen Öffnung. **b** Flüssigkeitsstrahl, der aus einem offenen Behälter austritt, dessen Öffnung nach oben zeigt. Die Flüssigkeitsoberfläche ist als dunkler horizontaler Streifen am oberen Bildrand zu sehen. (Experiment von H. Rouse aus seinem Film *Fluid Motion in a Gravitational Field*, Iowa Institute of Hydraulic Research).

$\mu = A_{\min}/A \approx 0.61 \dots 0.64$ . Da sich die Torricelli-Geschwindigkeit auf den minimalen Strahlquerschnitt bezieht, ist der tatsächliche Volumenstrom durch die Ausflußöffnung um den Faktor  $\mu$  reduziert (siehe auch ► Tabelle 7.5 in Abschnitt 7.6.1)

$$\dot{V} = A_{\min} \sqrt{2gh} = \mu A \sqrt{2gh}. \quad (4.43)$$

Wenn die Öffnung des Behälters hinreichend abgerundet ausgeführt ist, tritt keine Strahlkontraktion mehr auf.

### Quasistationäres Ausströmen

Beim Ausströmen einer Flüssigkeit aus einem Behälter durch eine kleine Öffnung stellt sich relativ schnell die Torricelli-Geschwindigkeit ein. Nach längerer Zeit wird sich das Absinken des Flüssigkeitsspiegels bemerkbar machen. Um die Entleerzeit abzuschätzen, nach welcher die gesamte Flüssigkeit aus dem Behälter ausgeströmt sein wird, kann man annehmen, dass sich die Torricelli-Geschwindigkeit immer sofort zur momentanen Füllhöhe einstellt.

Es sei  $A_2$  die Fläche, durch welche die Flüssigkeit ausströmt und  $A_1$  die Querschnittsfläche eines zylindrischen Behälters, der anfänglich bis zur Höhe  $H$  gefüllt ist. Dann gilt für den Volumenstrom aufgrund der Massenerhaltung

$$A_1 \frac{ds}{dt} = A_2 u(t). \quad (4.44)$$

Dabei ist  $s(t)$  die Absenkung des Flüssigkeitsspiegels und  $u(t) = \sqrt{2gh(t)} = \sqrt{2g[H - s(t)]}$  die momentane Torricelli-Geschwindigkeit. Durch Integration erhalten wir für die Entleerzeit

$$T = \int_0^T dt \stackrel{(4.44)}{=} \frac{A_1}{A_2} \int_0^H \frac{ds}{\sqrt{2g(H-s)}} \stackrel{x=H-s}{=} \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{\sqrt{2g}} \underbrace{\int_0^H \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2\sqrt{x}|_0^H} = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (4.45)$$

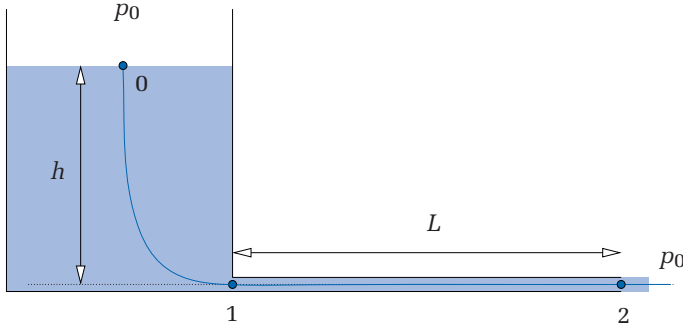


Abb. 4.10: Skizzen zum Ausfluß aus einem Behälter, an den sich ein langes Rohr anschließt.

Diese Näherung liefert für alle Ausflußöffnungen  $A_2/A_1 \ll 1$  recht gute Ergebnisse für die Entleerzeit  $T$ . Der zeitliche Verlauf des Ausflußvorgangs wird für  $A_2/A_1 < 0.2$  gut wiedergegeben.<sup>16</sup>

#### Instationäres Ausströmen durch ein langes Rohr

Wenn sich die gesamte Flüssigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe befindet, wird die Strömung durch den Ausfluß erst nach einer gewissen Zeit den Torricelli-Wert erreichen, da die Flüssigkeit einer jeden Stromröhre erst beschleunigt werden muss. Dies ist besonders dann wichtig, wenn sich an die Öffnung noch eine längere Rohrleitung anschließt (► Abb. 4.10). Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das Rohr sehr lang ist im Vergleich zur Höhe des Behälters, so dass fast nur diejenige Flüssigkeit beschleunigt werden muss, die sich im Rohr befindet.<sup>17</sup>

Um den Effekt der Beschleunigung der inkompressiblen Flüssigkeit zu berücksichtigen, die sich im Rohr zwischen den Punkten 1 und 2 befindet, verwenden wir anstelle der stationären Bernoulli-Gleichung (4.21) die Euler-Gleichung für eine Stromlinie (4.18), die noch den instationären Term  $\partial u / \partial t$  enthält, und integrieren sie entlang der geraden Stromlinie von 1 nach 2

$$1 \rightarrow 2 : \quad \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 . \quad (4.46)$$

Für ein horizontales Rohr ( $z_1 = z_2$ ) der Länge  $L$  mit konstantem Querschnitt gilt für eine inkompressible Flüssigkeit  $u = u_1 = u_2$  und damit  $\partial u / \partial t = du / dt$ , denn  $u$  kann hier nicht mehr von  $x$  abhängen. Damit erhalten wir

$$L \frac{du}{dt} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{p_1 - p_0}{\rho} . \quad (4.47)$$

Im letzten Schritt haben wir angenommen, dass der Druck  $p_2$  am Ende der Leitung gleich dem Umgebungsdruck  $p_0$  sei. Der Druck  $p_1[u(t)]$  am Anfang des Rohres hängt

<sup>16</sup> Weitere Details zur instationären Entleerung von Behältern sind in Truckenbrodt (1996) zu finden.

<sup>17</sup> Wenn man auch die Beschleunigung der im Behälter befindlichen Flüssigkeit berücksichtigen wollte, müßte man die instationäre Bernoulli-Gleichung verwenden (siehe Abschnitt 4.2.2). Dazu wäre das Potential  $\phi$  der Strömung zu berechnen, worauf wir hier verzichten.

aber noch von der Geschwindigkeit ab. Um ihn zu eliminieren, verwenden wir die (stationäre) Bernoulli-Gleichung für eine Stromlinie von 0 nach 1<sup>18</sup>

$$0 \rightarrow 1: \frac{u^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + gh. \quad (4.48)$$

Durch Einsetzen von  $(p_1 - p_0)/\rho$  erhalten wir die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung für  $u$

$$L \frac{du}{dt} = gh - \frac{u^2}{2}. \quad (4.49)$$

Trennung der Variablen und Verwendung der stationären Endgeschwindigkeit  $u_s := u(t \rightarrow \infty) = \sqrt{2gh}$  (Torricelli) liefert

$$\frac{du}{2gh - u^2} = \frac{dt}{2L} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(u/u_s)}{1 - u^2/u_s^2} = \frac{u_s dt}{2L} \quad (4.50)$$

und nach Integration<sup>19</sup>

$$\ln \left( \frac{1 + u/u_s}{1 - u/u_s} \right) = \frac{u_s t}{L} + C. \quad (4.51)$$

Wegen  $u(t = 0) = 0$  ist die Integrationskonstante  $C = 0$  und wir erhalten

$$\frac{u(t)}{u_s} = \frac{\exp \left( \frac{u_s t}{L} \right) - 1}{\exp \left( \frac{u_s t}{L} \right) + 1} = \tanh \left( \frac{u_s t}{2L} \right). \quad (4.52)$$

Die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit ist in ► Abb. 4.11a dargestellt.

Mit Kenntnis der Geschwindigkeit  $u(t)$  können wir auch die zeitliche Entwicklung des Drucks  $p_1(t)$  am Anfang des Rohres bestimmen. Aus der Bernoulli-Gleichung für den Behälter  $0 \rightarrow 1$  (4.48) erhalten wir

$$\frac{p_1(t) - p_0}{\rho gh} = 1 - \frac{u^2}{2gh} = 1 - \frac{u^2}{u_s^2} = 1 - \tanh^2 \left( \frac{u_s t}{2L} \right). \quad (4.53)$$

Mit der Funktion  $p_1(t)$  und der um den zeitabhängigen Term erweiterten Bernoulli-Gleichung (4.46) können wir den Druck  $p(x, t)$  (anstelle von  $p_2$ ) für eine beliebige Position  $x$  entlang des Rohres berechnen ( $z_1 = z_2, u_1 = u_2$ )

$$\underbrace{\int_{x_1}^x \frac{du}{dt} ds}_{x(du/dt)} + \frac{p(x, t)}{\rho} = \frac{p_1(t)}{\rho}. \quad (4.54)$$

Der Druck ist also eine lineare Funktion von  $x$  und muss deshalb die Form haben (betrachte  $x = 0$  und  $x = L$ )

$$p(x, t) = p_1(t) - \frac{x}{L} [p_1(t) - p_0]. \quad (4.55)$$

<sup>18</sup> Die Verwendung der stationären Bernoulli-Gleichung für  $0 \rightarrow 1$  entspricht der Annahme, dass sich die Strömung im Behälter immer sofort entsprechend der Strömung im Rohr anpasst. Die Trägheit der Flüssigkeit in dem Teil der gesamten Stromröhre, der im Behälter liegt, wird vernachlässigt.

<sup>19</sup> Es ist  $\int (1 - x^2)^{-1} dx = \frac{1}{2} \ln [(1 + x)/(1 - x)]$ .

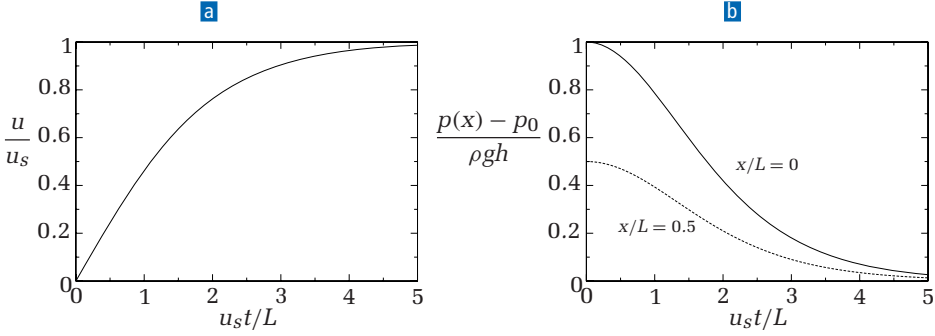


Abb. 4.11: Instationärer Ausfluß durch ein horizontales Rohr der Länge  $L$ . **a** Geschwindigkeitsentwicklung nach einem plötzlichen Öffnen. **b** Zeitliche Entwicklung des Drucks am Einlaß des Rohres ( $x/L = 0$ ) und in der Mitte ( $x/L = 0.5$ ) nach dem Öffnen.

Dies können wir in die reduzierte Form bringen

$$\frac{p(x, t) - p_0}{\rho g h} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{p_1(t) - p_0}{\rho g h} \stackrel{(4.53)}{=} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left[1 - \tanh^2\left(\frac{u_s t}{2L}\right)\right]. \quad (4.56)$$

Der entsprechende zeitliche Druckverlauf ist für den Anfang ( $x/L = 0$ ) und für die Mitte des Rohres ( $x/L = 0.5$ ) in ► Abb. 4.11**b** dargestellt.<sup>20</sup>

## 4.4 Energiesatz für kompressible Strömungen

### 4.4.1 Thermodynamische Größen im Staupunkt

Den Energiesatz (4.15) für ein ideales Gas können wir für  $z_1 = z_0$  in der Form

$$\frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{u_0^2}{2} + c_p T_0 \quad (4.57)$$

schreiben. Im Staupunkt (Index 0) eines mit  $u_1$  angeströmten Körpers ist  $u_0 = 0$  (siehe ► Abb. 4.7) und es gilt

$$\frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 = c_p T_0. \quad (4.58)$$

Hieraus können wir sofort die Temperaturerhöhung  $T_0 - T_1$  im Staupunkt berechnen. Die kinetische Energie pro Masse wird bei Annäherung an den Staupunkt in thermische Energie umgesetzt. Unter der Annahme einer isentropen Zustandsänderung

<sup>20</sup> Die hier getroffene Annahme einer inkompressiblen Strömung impliziert, dass die Schallgeschwindigkeit unendlich ist (siehe Abschnitt 6.1.1). Dann stellt sich der Druck immer sofort gemäß der Bernoulli-Gleichung ein. Bei einer endlichen, wenn auch hohen Schallgeschwindigkeit kommt es beim plötzlichen Öffnen eines Ventils am Ende der Rohrleitung zu einer plötzlichen Druckabsenkung. Diese Druckvariation läuft mit Schallgeschwindigkeit vom Ende zum Anfang des Rohres, wo sie reflektiert wird, und so weiter. Dies führt letztendlich dazu, dass die berechneten kontinuierlichen Geschwindigkeits- und Druckverläufe in Realität feine Treppenfunktionen sind. Siehe dazu auch § 4.3.3.3 von Truckenbrodt (1992).

lassen sich aus der Temperaturerhöhung auch die Druck- und Dichteänderungen im Staupunkt angeben. Denn für isentrope Zustandsänderungen, d. h.  $p_1/p_0 = (\rho_1/\rho_0)^\kappa$ , gelten für ein ideales Gas die Relationen

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad \text{und} \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{1/(\kappa-1)}. \quad (4.59)$$

#### 4.4.2 Wärmezufuhr bei konstantem Druck

Wir betrachten einen Gas-Strahl der Geschwindigkeit  $u < c$  ( $c$ : Schallgeschwindigkeit), der sich in einem anderen Gas ausbreitet, in dem ein konstanter Druck  $p_a$  herrscht. Wenn wir annehmen, dass die Stromlinien des Strahls nur schwach gekrümmt sind, so pflanzt sich der Umgebungsdruck  $p_a$  praktisch ungehindert bis in den Strahl fort, denn der Druckgradient senkrecht zu schwach gekrümmten Stromlinien ist klein (siehe (4.30)). Entlang den Stromlinien gilt dann  $p \approx p_a = \text{const.}$

Andererseits gilt für eine stationäre reibungsfreie Strömung entlang einer Stromlinie die differentielle Form der Bernoulli-Gleichung (hier ohne Schwerfeld, vgl. (4.19))

$$u \, du = -\frac{dp}{\rho}. \quad (4.60)$$

Mit  $dp \approx 0$  ist der Betrag der Geschwindigkeit  $u \approx \text{const.}$  konstant und es fallen die Terme der kinetischen Energie pro Masse  $u^2/2$  aus der Energiegleichung (4.12) heraus. Unter Vernachlässigung der potentiellen Energie bleibt lediglich ( $h = c_p T$ )

$$c_p T_2 = c_p T_1 + q \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{q}{c_p T_1} > 1, \quad (4.61)$$

wobei  $q > 0$  die pro Masse zwischen zwei Punkten 1 und 2 zugeführte Energie ist, zum Beispiel durch chemische Reaktion (Verbrennung). Für ein ideales Gas mit der Zustandsgleichung  $p/\rho = (c_p - c_v)T$  folgt aus dem Temperaturverhältnis ( $p = \text{const.}$ )

$$\frac{A_2}{A_1} \stackrel{(*)}{=} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} > 1. \quad (4.62)$$

Hierbei wurde in (\*) zusätzlich die Massenerhaltung  $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2$  (4.3) für  $u = \text{const.}$  verwendet.

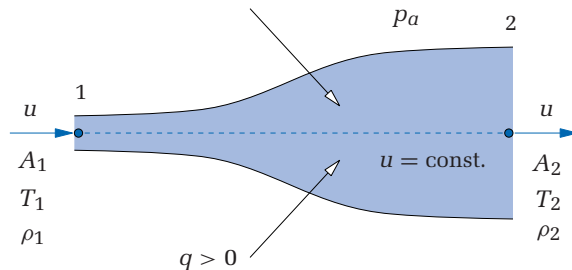


Abb. 4.12: Expansion eines Freistrahls bei Wärmezufuhr (z. B. durch Verbrennung) zwischen 1 und 2 bei konstantem Umgebungsdruck  $p_a$ .

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: [info@pearson.de](mailto:info@pearson.de)

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<http://ebooks.pearson.de>**