



Russell C. Hibbeler

# Technische Mechanik 2

## Festigkeitslehre

### Lehr- und Übungsbuch

8., aktualisierte Auflage





## Lösung

**Inneres Torsionsmoment** Das innere Torsionsmoment im Segment  $AB$  des Pfostens ist konstant. Aus dem Freikörperbild, Abbildung 6.22b, erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum M_z &= 0; \quad -F a - F a + T_{AB} = 0 \\ T_{AB} &= F (2 a) = (100 \text{ N}) 2 (0,15 \text{ m}) \\ T_{AB} &= 30 \text{ Nm} = 30 (10^3) \text{ Nmm}\end{aligned}$$

Die Größe des Torsionswiderstandes in dem vergrabenen Segment  $BC$  kann aus dem Momentengleichgewicht des gesamten Pfostens bestimmt werden, Abbildung 6.22c:

$$\begin{aligned}\sum M_z &= 0; \quad 2F a - m_T l_1 = 0 \\ m_T &= \frac{2F \cdot a}{l_1} = \frac{(100 \text{ N})(300 \text{ mm})}{600 \text{ mm}} \\ m_T &= 50 \text{ Nmm/mm}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus dem Freikörperbild eines an der Stelle  $x$  geschnittenen Abschnittes des Pfostens innerhalb des Bereichs  $BC$ , Abbildung 6.22d,

$$\begin{aligned}\sum M_z &= 0; \quad T_{BC} - m_T x = 0 \\ T_{BC} &= m_T x = 2F a x / l_1\end{aligned}$$

**Maximale Schubspannung** Die größte Schubspannung tritt im Bereich  $AB$  auf, denn das Torsionsmoment ist dort am größten, und  $I_p$  ist für den Pfeiler konstant. Mit Hilfe der Formel der Torsionsschubspannung erhalten wir

$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB} r}{I_p} = \frac{T_{AB} \frac{d}{2}}{\frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{2}} = \frac{(30(10^3) \text{ Nmm})(25 \text{ mm})}{\frac{\pi (25 \text{ mm})^4}{2}} = 1,22 \text{ N/mm}^2$$

**Verdrehwinkel** Der Verdrehwinkel des oberen Endes relativ zum unteren Ende des Pfostens kann bestimmt werden, denn er ist unten eingespannt und dreht sich gerade noch nicht. Beide Segmente  $AB$  und  $BC$  verdrehen sich und wir erhalten

$$\begin{aligned}\phi_A &= \frac{T_{AB} l_2}{I_p G} + \int_0^{l_1} \frac{T_{BC} dx}{I_p G} = \frac{T_{AB} l_2}{I_p G} + \frac{m_T}{I_p G} \int_0^{l_1} x dx \\ &= \frac{T_{AB} l_2}{I_p G} + \frac{m_T}{I_p G} \frac{1}{2} [x_2^2 - x_1^2]_0^{l_1} = \frac{T_{AB} l_2}{I_p G} + \frac{m_T}{I_p G} \frac{1}{2} (l_1^2 - 0) \\ &= \frac{T_{AB} l_2 + \frac{m_T}{2} l_1^2}{\frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4 G} 2} = \frac{30(10^3) \text{ Nmm} (900 \text{ mm}) + 25 \text{ Nmm/mm} (600 \text{ mm})^2}{\frac{\pi (25 \text{ mm})^4}{2} 40(10^3) \text{ N/mm}^2} \\ &= 0,00147 \text{ rad}\end{aligned}$$

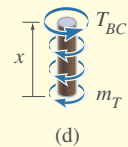
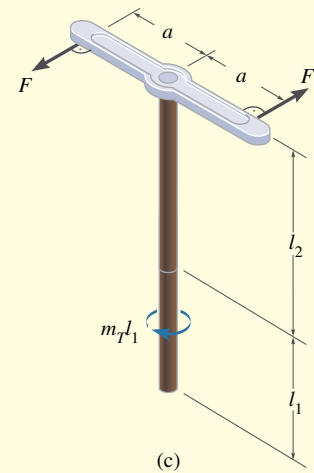
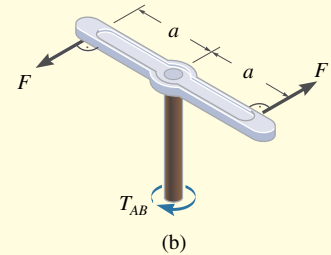


Abbildung 6.22

## Beispiel 6.10

Die in Abbildung 6.23a dargestellte konische Welle besteht aus einem Material mit dem Schubmodul  $G$ . Bestimmen Sie den Verdrehwinkel ihres Endes  $B$ , wenn die Welle einem Drehmoment  $M_T$  ausgesetzt ist.

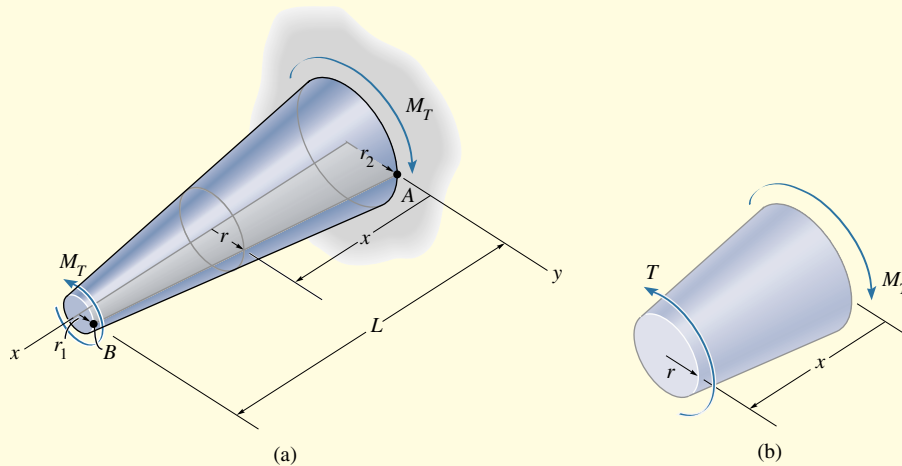
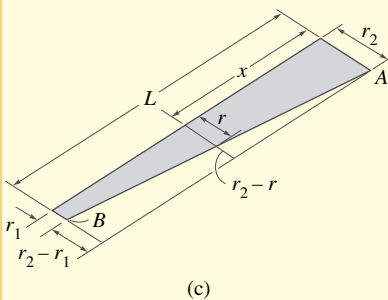


Abbildung 6.23

## Lösung

**Inneres Torsionsmoment** Direkt aus der Anschauung oder systematisch mittels Freikörperbild, Abbildung 6.23b, ergibt sich  $T = M_T$ .

**Verdrehwinkel** Hier verändert sich das polare Flächenträgheitsmoment entlang der Wellenlänge und deswegen müssen wir es als Funktion der Koordinate  $x$  beschreiben. Der Radius  $r$  der Welle an der Stelle  $x$  kann aus Abbildung 6.23c bestimmt werden. Wir erhalten



$$\frac{r_2 - r_1}{L} = \frac{r_2 - r}{x}$$

$$r = r_2 - x \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right)$$

Somit ergibt sich an der Stelle  $x$

$$I_p(x) = \frac{\pi}{2} \left[ r_2 - x \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right) \right]^4$$

Unter Anwendung der Gleichung (6.14) erhalten wir

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{\left( \frac{\pi}{2} \right) \left[ r_2 - x \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right) \right]^4 G} = \frac{2T}{\pi G} \int_0^L \frac{dx}{\left[ r_2 - x \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right) \right]^4}$$

Nach Ausführung der Integration mit Hilfe einer Integraltafel ergibt sich

$$\phi = \left( \frac{2T}{\pi G} \right) \frac{1}{3 \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right) \left[ r_2 - x \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right) \right]^3} \bigg|_0^L = \frac{2T}{\pi G} \left( \frac{L}{3(r_2 - r_1)} \right) \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$$

bzw.

$$\phi = \frac{2TL}{3\pi G} \left( \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_1^3 r_2^3} \right)$$

Beachten Sie, dass zur Teilüberprüfung des Ergebnisses für  $r_1 = r_2 = r$  sich der Ausdruck

$$\phi = \frac{T \cdot L}{\left[ \left( \frac{\pi}{2} \right) r^4 \right] \cdot G} = \frac{T \cdot L}{I_p \cdot G}$$

ergibt, der Gleichung (6.15) entspricht.

## 6.5 Statisch unbestimmt gelagerte torsionsbeanspruchte Bauteile

Eine torsionsbeanspruchte Welle kann als statisch unbestimmt klassifiziert werden, wenn das Momentengleichgewicht um die Wellenachse nicht ausreicht, alle unbekannten Torsionsmomente zu bestimmen. Ein Beispiel dieser Problemkategorie ist in Abbildung 6.24a angegeben. Wie im Freikörperbild dargestellt, Abbildung 6.24b, sind die Reaktionsmomente an den Lagern A und B unbekannt. Die folgende Bedingung muss erfüllt sein:

$$\sum M_x = 0 ; \quad M_C - M_A - M_B = 0$$

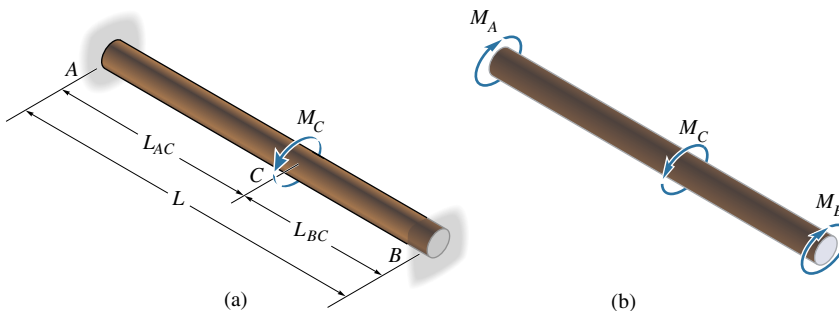


Abbildung 6.24

Da hier nur eine Gleichgewichtsbedingung existiert, aber zwei Unbekannte vorliegen, ist dieses Problem statisch unbestimmt. Damit wir eine Lösung erhalten, benutzen wir im Weiteren die Berechnungsmethode, die wir bereits in *Abschnitt 4.4* diskutiert haben.

Die erforderliche Verträglichkeitsbedingung oder kinematische Bedingung verlangt, dass der gegenseitige Verdrehwinkel der beiden Wellenenden gleich null sein muss, denn die Enden sind fest eingespannt. Deshalb wird

$$\phi_{A/B} = 0$$

gefordert.

Damit wir diese Gleichung hinsichtlich der unbekannten Torsionsmomente auswerten können, nehmen wir an, dass sich das Material linear-elastisch verhält, so dass die Last-Verformungs-Beziehung durch  $\phi = TL/(I_p G)$  ausgedrückt werden kann. Mit der Kenntnis, dass das innere Torsionsmoment im Segment AC als  $T_{AC} = M_A$  und im Segment CB als  $T_{BC} = -M_B$  berechnet werden kann, Abbildung 6.24c, liefert die Kompatibilitätsgleichung

$$\frac{M_A \cdot L_{AC}}{I_p \cdot G} - \frac{(M_C - M_A) L_{BC}}{I_p \cdot G} = 0$$

wobei  $I_p G$  als konstant angenommen wird.

Einsetzen von  $M_B = M_C - M_A$  führt auf

$$\frac{M_A \cdot L_{AC}}{I_p \cdot G} - \frac{(M_C - M_A) L_{BC}}{I_p \cdot G} = 0$$

oder

$$M_A = \frac{M_C L_{BC}}{L_{AC} + L_{BC}}$$

Die Lösung der beiden Gleichungen für die Reaktionsmomente  $M_A$  und  $M_B$  liefert mit  $L = L_{AC} + L_{BC}$  das Ergebnis

$$T_{AC} = M_C \left( \frac{L_{BC}}{L} \right)$$

und

$$T_{BC} = M_C \left( \frac{L_{AC}}{L} \right)$$

Beachten Sie, dass jedes dieser Reaktionsmomente linear mit der Länge  $L_{AC}$  oder  $L_{BC}$  des angreifenden Drehmoments ansteigt oder abnimmt.

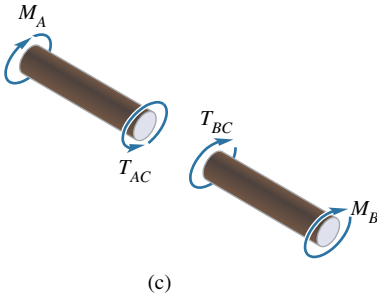


Abbildung 6.24

## Lösungsweg

Die unbekannten Torsionsmomente werden in statisch unbestimmt gelagerten Wellen durch Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung, der Kompatibilitätsbedingung und des Torsionsmomenten-Verdrehungs-Zusammenhangs für die Welle ermittelt.

### Gleichgewichtsbedingung

- Zeichnen Sie ein Freikörperbild der Welle, um alle wirkenden Torsionsmomente zu erkennen. Stellen Sie danach die Gleichgewichtsbedingung der Momente um die Wellenachse auf.

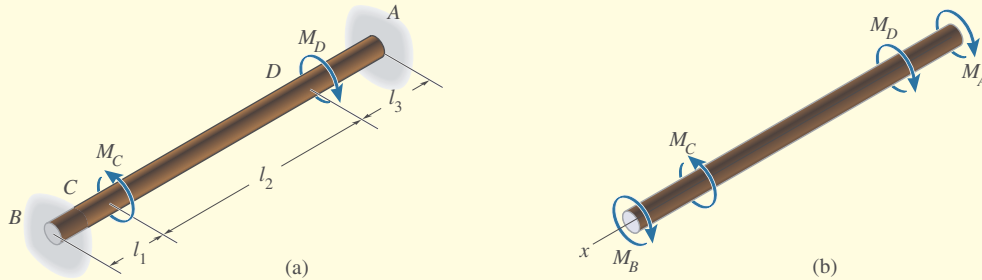
### Kompatibilitätsbedingung

- Untersuchen Sie zur Aufstellung der Kompatibilitätsbedingung, wie die Welle sich verdreht, wenn auf sie äußere Belastungen einwirken, und berücksichtigen Sie, wie die Lager die Verdrehung der Welle behindern.
- Drücken Sie die Kompatibilitätsbedingung durch die von den Reaktionsmomenten verursachten Verdrehungen aus und wenden Sie dann die Torsionsmomenten-Verdrehungs-Relation an, z.B.  $\phi = TL/(I_p G)$ , um die unbekannten Torsionsmomente mit den unbekannten Verdrehungen in Beziehung zu setzen.
- Lösen Sie die Gleichgewichtsbedingung sowie die Kompatibilitätsgleichungen für die unbekannten Reaktionsmomente. Wenn eine der berechneten Größen einen negativen Wert annimmt, bedeutet dies, dass im Freikörperbild die angenommene Drehrichtung der betreffenden Größe umzukehren ist.

## Beispiel 6.11

Die in Abbildung 6.25a dargestellte Vollwelle aus Stahl hat den Durchmesser  $d$ . Bestimmen Sie die beiden Reaktionsmomente an den festen Einspannungen  $A$  und  $B$ , wenn an der Welle zwei äußere Drehmomente wirken.

$$M_C = 800 \text{ Nm}, M_D = 500 \text{ Nm}, l_1 = 0,2 \text{ m}, l_2 = 1,5 \text{ m}, l_3 = 0,3 \text{ m}, d = 20 \text{ mm}$$



## Lösung

**Gleichgewichtsbedingung** Das Freikörperbild, Abbildung 6.25b, zeigt, dass das Problem statisch unbestimmt ist, denn es gibt nur eine Gleichgewichtsbedingung in Form eines Momentengleichgewichts um die Längsachse mit den beiden Unbekannten  $M_A$  und  $M_B$ :

$$\sum M_x = 0; \quad -M_B + M_C - M_D - M_A = 0 \quad (1)$$

$$M_A = M_C - M_D - M_B$$

**Kompatibilitätsbedingung** Da die Enden der Welle fest eingespannt sind, muss der gegenseitige Verdrehwinkel der beiden Wellenenden gleich null sein. Somit kann die Kompatibilitätsgleichung wie folgt geschrieben werden:  $\phi_{A/B} = 0$ . Diese Bedingung kann hinsichtlich der unbekannten Drehmomente durch Anwendung der Relation  $\phi = TL / (I_p G)$  ausgedrückt werden. Es gibt hier drei Bereiche der Welle, in denen das innere Torsionsmoment konstant ist. Dies sind die Bereiche  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$ . Die Freikörperbilder in Abbildung 6.25c machen klar, wie die inneren Momente in den einzelnen Bereichen der Welle wirken. Unter Anwendung der in Abschnitt 6.4 aufgestellten Vorzeichenvereinbarung erhalten wir

$$\frac{-M_B l_1}{I_p G} + \frac{(M_A + M_D) l_2}{I_p G} + \frac{M_A l_3}{I_p G} = 0 \quad (2)$$

Mit den Gleichungen (1) in (2) liegen zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $M_A$  und  $M_B$  vor. Durch Auflösen erhält man

$$M_B = \frac{M_C (l_2 + l_3) - M_D l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{800 \text{ Nm} (1,8 \text{ m}) - 500 \text{ Nm} (0,3 \text{ m})}{2 \text{ m}} = 645 \text{ Nm}$$

$$M_A = M_C - M_D - M_B = 800 \text{ Nm} - 500 \text{ Nm} - 645 \text{ Nm} = -345 \text{ Nm}$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dass  $M_A$  entgegengesetzt der in Abbildung 6.25b angenommenen Richtung wirkt.

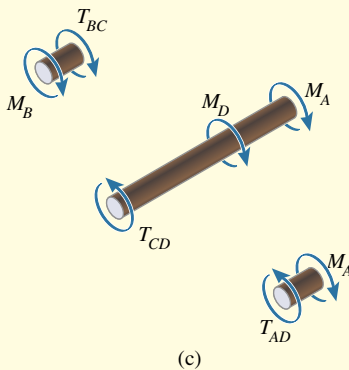


Abbildung 6.25



**Beispiel 6.12**

Die in Abbildung 6.26a dargestellte Welle besteht aus einem Stahlrohr mit einem Messingkern. Stellen Sie die Schubspannungsverteilung entlang einer radial verlaufenden Linie in der Querschnittsfläche bei Einwirkung eines Drehmoments  $M_T$  grafisch dar.

$M_T = 250 \text{ Nm}$ ,  $l = 1,2 \text{ m}$ ,  $r_i = 10 \text{ mm}$ ,  $r_a = 20 \text{ mm}$ ,  $G_{St} = 80 \text{ GPa}$ ,  
 $G_{Me} = 36 \text{ GPa}$

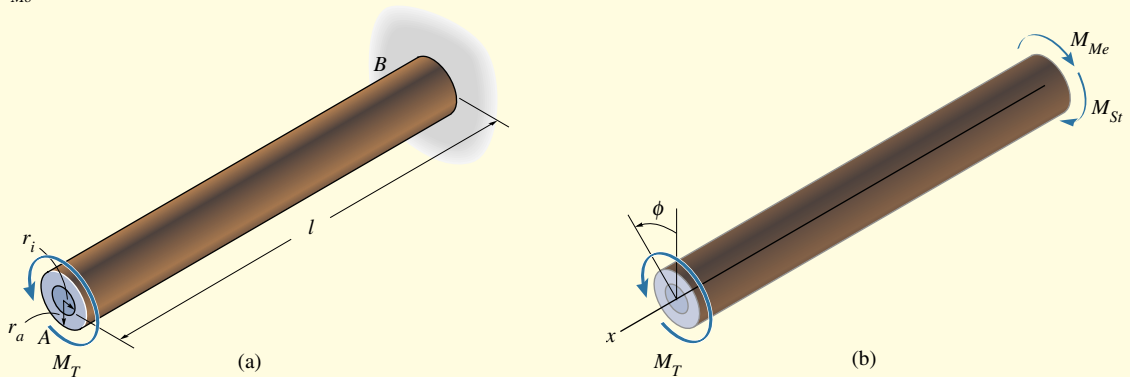


Abbildung 6.26

**Lösung**

**Gleichgewichtsbedingung** Das Freikörperbild der Welle ist in Abbildung 6.26b dargestellt. Das Reaktionsmoment an der Wand teilt sich auf in einen Anteil  $M_{St}$  im Stahlrohr und einen Anteil  $M_{Me}$  im Messingkern. Es ergibt sich folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum M_x = 0; \quad -M_{St} - M_{Me} + M_T = 0 \quad (1)$$

**Kompatibilitätsbedingung** Der Verdrehwinkel am Ende A muss sowohl für das Stahlrohr als auch für den Messingkern gleich groß sein, denn beide Materialien sind rutschfrei miteinander verbunden. Somit ist  $\phi = \phi_{St} = \phi_{Me}$

Durch Anwendung der Belastungs-Verdrehungs-Relation  $\phi = TL / (I_p G)$  erhalten wir

$$\frac{M_{St} l}{I_p G_{St}} = \frac{M_{Me} l}{I_p G_{Me}} \quad \frac{M_{St} l}{\frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4) G_{St}} = \frac{M_{Me} l}{\frac{\pi}{2} r_i^4 G_{Me}}$$

$$M_{St} = \frac{M_{Me} (r_a^4 - r_i^4) G_{St}}{r_i^4 G_{Me}} \quad (2)$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) folgt

$$-M_{Me} + M_T = \frac{G_{St} (r_a^4 - r_i^4)}{G_{Me} r_i^4} M_{Me}$$

$$M_{Me} = \frac{M_T}{1 + \frac{G_{St} (r_a^4 - r_i^4)}{G_{Me} r_i^4}} = \frac{250 \text{ Nm}}{1 + \frac{80 \text{ GPa} (20^4 - 10^4) \text{ mm}^4}{36 \text{ GPa} \cdot 10^4 \text{ mm}^4}} = 7,28 \text{ Nm}$$

$$M_{St} = M_T - M_{Me} = 250 \text{ Nm} - 7,28 \text{ Nm} = 242,72 \text{ Nm}$$

Diese Momente wirken über die gesamte Länge der Welle, denn es gibt keine weiteren äußeren Drehmomente, die zwischen den Enden angreifen. Die Schubspannung im Messingkern ändert sich von null am Mittelpunkt bis zu ihrem Maximum an der Übergangsstelle, wo der Messingkern mit dem Stahlrohr in Kontakt ist. Mit Hilfe der Formel für die Torsionsschubspannung wird

$$(\tau_{Me})_{max} = \frac{T_{Me} r}{I_p} = \frac{T_{Me} r_i}{\frac{\pi}{2} r_i^4} = \frac{(7280 \text{ Nmm})(10 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} (10 \text{ mm})^4}$$

$$(\tau_{Me})_{max} = 4,63 \text{ N/mm}^2 = 4,63 \text{ MPa}$$

Für den Stahl liegt die minimale Schubspannung ebenfalls an dieser Übergangsstelle,

$$(\tau_{St})_{min} = \frac{M_{St} r}{I_p} = \frac{M_{St} r_i}{\frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4)} = \frac{(242,72 \text{ Nm})(10^3 \text{ mm/m})(10 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} ((20 \text{ mm})^4 - (10 \text{ mm})^4)}$$

$$(\tau_{St})_{min} = 10,30 \text{ N/mm}^2 = 10,30 \text{ MPa}$$

und die maximale Schubspannung an der äußeren Mantelfläche ist

$$(\tau_{St})_{max} = \frac{M_{St} r}{I_p} = \frac{M_{St} r_a}{\frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4)} = \frac{(242,72 \text{ Nm})(10^3 \text{ mm/m})(20 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} ((20 \text{ mm})^4 - (10 \text{ mm})^4)}$$

$$(\tau_{St})_{max} = 20,60 \text{ N/mm}^2 = 20,60 \text{ MPa}$$

Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.26c grafisch dargestellt. Achten Sie auf den Sprung der Schubspannung an der Übergangsstelle von Messing zu Stahl. Das ist zu erwarten, denn die Materialien haben unterschiedliche Schubmodule, d.h. Stahl ist steifer als Messing ( $G_{St} > G_{Me}$ ) und liefert demzufolge die größere Schubspannung an dieser Übergangsstelle. Obwohl die Schubspannung hier unstetig ist, gilt dies für die Verzerrung nicht. Vielmehr ist diese dort für beide Materialien *gleich*. Das kann mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes  $\gamma = \tau / G$  verdeutlicht werden. An der Übergangsstelle, Abbildung 6.26d, ist die Gleitung

$$\gamma_{Me} = \frac{(\tau_{Me})_{max}}{G_{Me}} = \frac{4,63 \text{ N/mm}^2}{36(10^3) \text{ N/mm}^2} = 0,1286 (10^{-3}) \text{ rad}$$

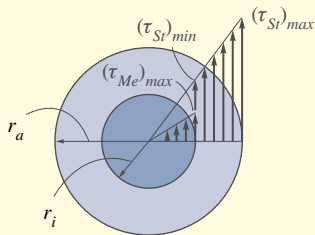
bzw.

$$\gamma_{St} = \frac{(\tau_{St})_{min}}{G_{St}} = \frac{10,30 \text{ N/mm}^2}{80(10^3) \text{ N/mm}^2} = 0,1286 (10^{-3}) \text{ rad}$$

d.h.

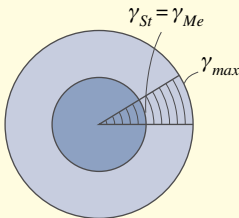
$$\gamma_{Me} = \gamma_{St}$$

wie behauptet.



Schubspannungsverteilung

(c)



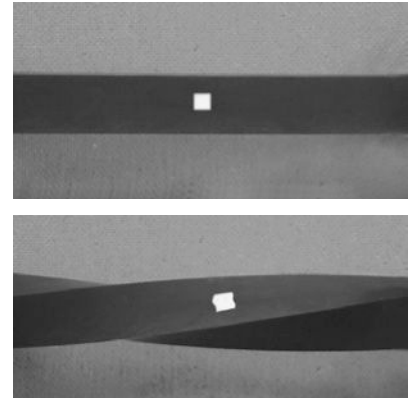
Gleitungsverteilung

(d)

Abbildung 6.26

## \*6.6 Torsion von Stäben mit nichtkreisförmigem Querschnitt

In Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, dass sich bei Einwirkung eines äußeren Drehmoments auf einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt – also einen achsensymmetrischen Stab – die Gleitungen linear von null in der Mitte bis zu ihrem Maximum an der äußeren Mantelfläche ändern. Aufgrund der Gleichförmigkeit der Gleitung in allen Punkten auf demselben Radius deformiert sich der Querschnitt nicht; vielmehr bleibt er eben und verdreht sich als Ganzes. Stäbe mit nichtkreisförmigem Querschnitt sind jedoch *nicht* achsensymmetrisch. Weil nun die Schubspannung in einer sehr komplexen Weise über den Querschnitt verteilt ist, werden diese sich **verwölben**, wenn sich die Stabenden gegenseitig verdrehen. Dies ist ersichtlich, wenn man beobachtet, wie sich die Gitternetzlinien auf einem Stab mit einem quadratischen Querschnitt deformieren, wenn dieser tordiert wird, Abbildung 6.27. Diese Deformation führt in der Konsequenz zu einer erheblich erschwerten Torsionsberechnung von nichtkreisförmigen Stäben und wird hier nicht weiter betrachtet.



Achten Sie auf die Verformung des quadratischen Flächenelements, wenn der Gummistab durch ein Drehmoment belastet wird.

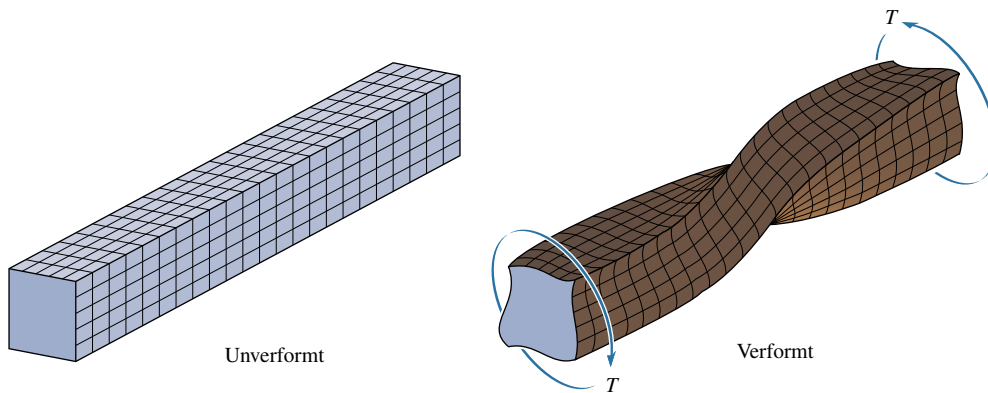
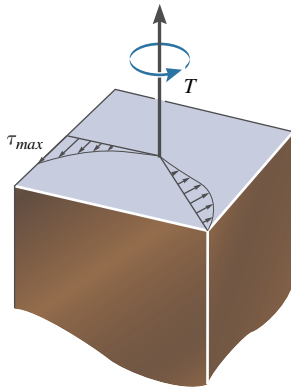


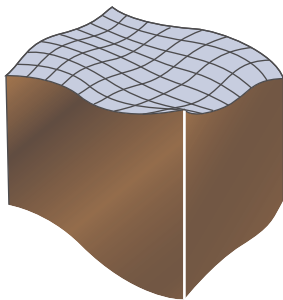
Abbildung 6.27

Mit Hilfe einer auf der Elastizitätstheorie basierenden Berechnungsmethode ist es allerdings möglich, die Schubspannungsverteilung innerhalb eines Stabes mit quadratischem Querschnitt zu bestimmen. Beispiele dafür, wie sich die Schubspannung in Richtung zweier radial verlaufender Linien an einem Stab verändert, sind in Abbildung 6.28a dargestellt. Da sich die Schubspannungsverteilungen in einer sehr komplizierten Weise ändern, führen die dadurch erzeugten Gleitungen zu einer *Verwölbung* des Querschnittes, wie dies in Abbildung 6.28b zu sehen ist. Beachten Sie, dass die Eckpunkte des Stabes spannungsfrei sind und demzufolge dort auch die Gleitung verschwindet. Den Grund hierfür kann man erkennen, indem ein an diesem Punkt befindliches



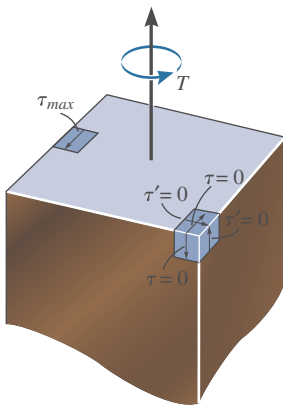
Schubspannungsverteilung  
entlang radialer Linien

(a)



Verwölbung der Querschnittsfläche

(b)



(c)

Abbildung 6.28

Volumenelement betrachtet wird, Abbildung 6.28c. Damit über die Seiten des Elements ein Beitrag zum Torsionsmoment  $T$  geliefert wird, muss dort eine Schubspannung  $\tau$  bzw.  $\tau'$  wirken. Dann muss aber auch an der Mantelfläche eine korrespondierende Schubspannung  $\tau$  bzw.  $\tau'$  vorliegen. Da die Mantelflächen schubspannungsfrei sind, muss demnach  $\tau = 0$  bzw.  $\tau' = 0$  gelten.

Tabelle 6.1

Querschnittsform	$\tau_{max}$	$\phi$
<p>Quadrat</p>	$\frac{4,81 T}{a^3}$	$\frac{7,10 TL}{a^4 G}$
<p>Gleichseitiges Dreieck</p>	$\frac{20 T}{a^3}$	$\frac{46 TL}{a^4 G}$
<p>Ellipse</p>	$\frac{2 T}{\pi a b^2}$	$\frac{(a^2 + b^2) TL}{\pi a^3 b^3 G}$

Die Ergebnisse der Berechnung für einen quadratischen Querschnitt sind zusammen mit weiteren Resultaten aus der Elastizitätstheorie für Stäbe mit dreieckigem und elliptischem Querschnitt in Tabelle 6.1 dargestellt. In allen Fällen tritt die *maximale Schubspannung* an einer Stelle am Rand auf, die sich am nächsten zur Stabachse befindet. In Tabelle 6.1 sind diese Stellen als „Punkte“ auf den Querschnitten gekennzeichnet. Weiterhin sind die Formeln für den gegenseitigen Verdrehwinkel der Endquerschnitte jedes Stabes aufgeführt. Durch die Erweiterung der Ergebnisse auf Stäbe mit *beliebigem* Querschnitt kann auch gezeigt werden, dass ein Stab mit einem *kreisförmigen* Querschnitt bei Torsion am effektivsten ist, denn bei übereinstimmender Drehmomentenbelastung tritt sowohl eine *kleinere* maximale Schubspannung als auch ein *kleinerer* Verdrehwinkel auf als bei einem entsprechenden Stab mit gleich großer, jedoch nichtkreisförmiger Querschnittsfläche.

### Beispiel 6.13

Der Stab aus Aluminium, dargestellt in Abbildung 6.29, besitzt einen Querschnitt in Form eines gleichseitigen Dreiecks. Bestimmen Sie das größte am Stabende wirkende Torsionsmoment  $M_T$ ,

wenn die zulässige Schubspannung  $\tau_{zul}$  und der Verdrehwinkel auf  $\phi_{zul}$  begrenzt ist. Welches Drehmoment kann durch einen Stab mit gleichgroßem kreisförmigen Querschnitt desselben Materials aufgenommen werden?

$l = 1,2 \text{ m}$ ,  $b = 40 \text{ mm}$ ,  $\tau_{zul} = 56 \text{ MPa}$ ,  $\phi_{zul} = 0,02 \text{ rad}$ ,  $G_{Al} = 26 \text{ GPa}$ ,  $\alpha = 60^\circ$

### Lösung

Es ist offensichtlich, dass das resultierende innere Torsionsmoment  $T$  in jedem Querschnitt entlang der Stabachse auch  $M_T$  ist. Mit Hilfe der Formeln für  $\tau_{max}$  und  $\phi$  aus Tabelle 6.1 ergibt sich somit

$$\tau_{zul} = \frac{20 M_T}{a^3}; \quad M_T = \frac{\tau_{zul} b^3}{20} = \frac{56 \text{ N/mm}^2 (40 \text{ mm})^3}{20}$$

$$M_T = 179,2 (10^3) \text{ Nmm} = 179,2 \text{ Nm}$$

und

$$\phi_{zul} = \frac{46 M_T L}{a^4 G_{Al}}; \quad M_T = \frac{\phi_{zul} b^4 G_{Al}}{46 l} = \frac{0,02 (40 \text{ mm})^4 26 (10^3) \text{ N/mm}^2}{46 (1200 \text{ mm})}$$

$$M_T = 24,12 (10^3) \text{ Nmm} = 24,12 \text{ Nm}$$

Der Vergleich lässt erkennen, dass das Drehmoment durch den zulässigen Verdrehwinkel begrenzt wird.

**Kreisförmiger Querschnitt** Die unterschiedlichen Querschnittsformen sollen übereinstimmende Flächengröße besitzen, d.h.

$$A_{Kreis} = A_{Dreieck}; \quad \pi r^2 = \frac{1}{2} b (b \sin \alpha)$$

Somit kann der Radius für die Kreisfläche berechnet werden:

$$r = \sqrt{\frac{b(b \sin \alpha)}{2\pi}} = \sqrt{\frac{(40 \text{ mm})(40 \text{ mm} 0,866)}{2\pi}} = 14,85 \text{ mm}$$

Die Begrenzungen der Spannung und des Verdrehwinkels erfordern dann

$$\tau_{zul} = \frac{M_T r}{I_p}; \quad M_T = \frac{\tau_{zul} I_p}{r} = \frac{\tau_{zul} \frac{\pi}{2} r^4}{r} = 56 \text{ N/mm}^2 \frac{\pi}{2} (14,85 \text{ mm})^3$$

$$M_T = 288,1 (10^3) \text{ Nmm} = 288,1 \text{ Nm}$$

$$\phi_{zul} = \frac{M_T L}{I_p G_{Al}}; \quad M_T = \frac{\phi_{zul} \frac{\pi}{2} r^4 G_{Al}}{l} = \frac{0,02 \frac{\pi}{2} (14,85 \text{ mm})^4 26 (10^3) \text{ N/mm}^2}{1200 \text{ mm}}$$

$$M_T = 33,10 (10^3) \text{ Nmm} = 33,10 \text{ Nm}$$

Wieder begrenzt der Verdrehwinkel das übertragbare Drehmoment, das allerdings – wie vorhergesagt – größer geworden ist, und zwar um 37%.

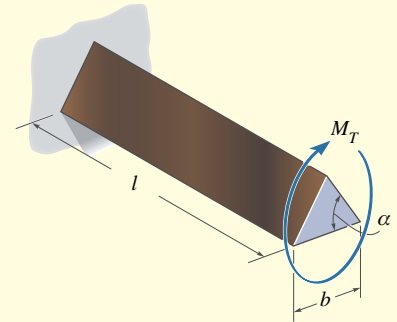


Abbildung 6.29

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: [info@pearson.de](mailto:info@pearson.de)

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<http://ebooks.pearson.de>**