

**„Bafög“-
Ausgabe**

et
elektrotechnik



**Martin Horn
Nicolaos Dourdoumas**

Regelungstechnik

**Rechnerunterstützter Entwurf
zeitkontinuierlicher und
zeitdiskreter Regelkreise**

7.6 Stabilität

7.6.1 Einführung

Bei der Beurteilung des Stabilitätsverhaltens linearer zeitinvarianter und zeitdiskreter Systeme werden wir zwei Konzepte verfolgen:

1. die asymptotische Stabilität und
2. die BIBO-Eigenschaft (oft auch als BIBO-Stabilität bezeichnet).

Beim ersten Konzept liegt das *freie* Systemmodell

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_i \quad (7.66)$$

vor. Wir untersuchen bei *beliebigem* Anfangszustand \mathbf{x}_0 das Grenzverhalten des Zustandsvektors, d.h. wir interessieren uns für den Ausdruck

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i.$$

Beim zweiten Konzept gehen wir davon aus, dass der Anfangszustand \mathbf{x}_0 verschwindet, d.h. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Wir nehmen ferner an, dass die Werte der Eingangsgröße u_i gewisse einschränkende Merkmale aufweisen und fragen uns, ob die Werte der Ausgangsgröße y_i die gleichen Merkmale aufweisen. Wir untersuchen also das Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Systems

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d u_i \quad y_i = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_i + d_d u_i.$$

7.6.2 Asymptotische Stabilität

Die Lösung des freien Systems nach (7.66) als Funktion des vorgegebenen Anfangszustands kann sofort angegeben werden:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_d^i \mathbf{x}_0.$$

Das (freie) System wird *asymptotisch stabil* genannt, wenn bei beliebiger Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

gilt.

Einfach gesagt: Unabhängig von der Anfangsauslenkung kehrt das System nach unendlich langer (!) Zeit in den Ruhezustand Null zurück. Vom mathematischen Standpunkt aus heißt das: es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{A}_d^i \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{A}_d^i = \mathbf{0}, \quad (7.67)$$

nachdem der Anfangszustand \mathbf{x}_0 *beliebig* ist. Dann bedeutet das Vorliegen der asymptotischen Stabilität, dass der Grenzwert der unendlichen Matrixfolge

$$(\mathbf{A}_d) := (\mathbf{A}_d^0, \mathbf{A}_d^1, \mathbf{A}_d^2, \mathbf{A}_d^3, \dots)$$

gleich null ist!

Entscheidend für das Konvergenzverhalten der Folge ist die *betragsmäßige* Größe der n Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A}_d !

- Eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für das Vorliegen der asymptotischen Stabilität lautet:

$$|z_\nu| < 1 \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (7.68)$$

Das bedeutet, dass *alle* Eigenwerte *innerhalb* des Einheitskreises liegen müssen (siehe Abb. 7.1)!

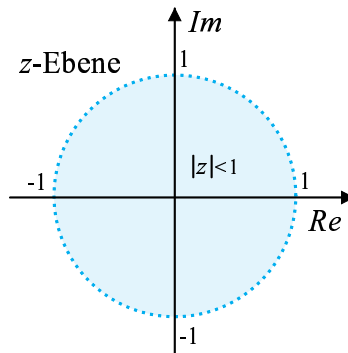


Abbildung 7.1: Zur asymptotischen Stabilität

Anmerkung

Die Gültigkeit des formulierten Kriteriums ist leicht ersichtlich, wenn die Systemmatrix lauter verschiedene Eigenwerte besitzt. In diesem Fall kann nach (7.57) die Systemmatrix \mathbf{A}_d mit Hilfe der Eigenvektoren und der zugehörigen Eigenwerte folgendermaßen formuliert werden:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{P} \mathbf{diag}(z_\nu) \mathbf{P}^{-1}$$

Bei asymptotischer Stabilität wird nach (7.67) verlangt, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{A}_d^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P} \mathbf{diag}(z_\nu^i) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}$$





gilt. Diese Forderung bedeutet wiederum, nachdem die Matrix \mathbf{P} regulär ist, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{diag}(z_\nu^i) = \mathbf{0}$$

bzw. für alle n Eigenwerte

$$\lim_{i \rightarrow \infty} z_\nu^i = 0, \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

gilt. Das ist sicher gegeben, wenn alle Eigenwerte *im Inneren* des Einheitskreises liegen.

7.6.3 BIBO-Eigenschaft

Wie schon erwähnt, interessiert man sich nun für das Verhalten der Ausgangsgröße, wobei der Anfangszustand gleich null ist. Es ist daher sinnvoll, die entwickelte Relation (7.7)

$$y_i = \sum_{\mu=0}^i g_{i-\mu} u_\mu = \sum_{\nu=0}^i g_\nu u_{i-\nu} \quad (7.69)$$

zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße zu benutzen.

Wir präzisieren die Klasse der in Frage kommenden Eingangsgrößen, indem wir *betragsmäßig* beschränkte Eingangsgrößen betrachten:

$$|u_i| \leq 1 \quad \text{für } i \geq 0. \quad (7.70)$$

Die auf den Wert 1 gesetzte Schranke für die Eingangsgröße bedeutet *keine* Einschränkung, da das System *linear* ist.

Das System besitzt die BIBO-Eigenschaft⁶, wenn die zugehörige Ausgangsgröße ebenfalls *betragsmäßig* beschränkt ist. Das bedeutet, dass *alle* Werte der Ausgangsgröße die Ungleichung

$$|y_i| \leq Y \quad \text{für } i \geq 0 \quad (7.71)$$

erfüllen. Hierbei ist Y eine endliche Konstante.

- Notwendig und hinreichend für das Vorliegen der BIBO-Eigenschaft ist die Erfüllung der Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu| < \infty. \quad (7.72)$$

Das heißt, die Gewichtsfunktion muss *absolut* summierbar sein.

⁶ Man sagt auch „das System ist BIBO-stabil“.

Bemerkung

Dieses Kriterium ist relativ leicht einzusehen, wenn man die Eingangsgröße

$$u_{i-\nu} = \operatorname{sgn}(g_\nu)$$

auf das System einwirken lässt. Der größtmögliche Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt $t = iT_d$ beträgt nach (7.69) dann

$$y_{i \max} = \sum_{\nu=0}^i |g_\nu|.$$

Durch den Grenzübergang $i \rightarrow \infty$ erhalten wir den *größtmöglichen* Wert für die Ausgangsgröße

$$y_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} y_{i \max} = \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu|, \quad (7.73)$$

der bei Vorliegen der BIBO-Eigenschaft die Ungleichung

$$y_\infty = \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu| < \infty$$

erfüllen muss.⁷

Bei der Ableitung dieser Bedingung spielt das *Bildungsgesetz* der Gewichtsfunktion anhand der Systemdaten $[\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d, \mathbf{c}_d, d_d]$ *keine* Rolle!

Obiges Kriterium (7.72) vereinfacht sich enorm, da die Gewichtsfunktion gemäß den Beziehungen

$$g_0 = d_d \quad \text{und} \quad g_\nu = \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{\nu-1} \mathbf{b}_d \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

gebildet wird. Es gilt dann:

- Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die BIBO-Eigenschaft ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = 0. \quad (7.74)$$

Bei der hier betrachteten Systemklasse $[\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d, \mathbf{c}_d, d_d]$ ist also der *Grenzwert* der Gewichtsfunktion entscheidend! Weiters ist wichtig, dass dieses Grenzverhalten von den Eigenwerten der Systemmatrix abhängt.⁸

- Aufgrund des Zusammenhanges der Gewichts- mit der Übertragungsfunktion ist Folgendes nicht verwunderlich: Man kann die BIBO-Eigenschaft eines Systems mit

⁷ Die Beziehung (7.73) spielt eine zentrale Rolle bei der rechnerunterstützten Synthese zeitdiskreter Regelkreise bei *beschränkten* Systemgrößen!

⁸ Siehe hierzu Gleichung (7.57) für den Fall verschiedener Eigenwerte.

Hilfe seiner Übertragungsfunktion überprüfen. Sie liegt *genau dann* vor, wenn *alle* Pole der z -Übertragungsfunktion *im* Inneren des Einheitskreises liegen.

ZUSAMMENFASSUNG

- Die asymptotische Stabilität liegt genau dann vor, wenn *alle* Eigenwerte z_ν der Systemmatrix \mathbf{A}_d *im* Inneren des Einheitskreises liegen, d.h.

$$|z_\nu| < 1 \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, n.$$

- Aus der asymptotischen Stabilität folgt die BIBO-Eigenschaft.
- Die BIBO-Eigenschaft liegt genau dann vor, wenn die Gewichtsfunktion g_ν absolut summierbar ist, d.h.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu| < \infty.$$

- Die BIBO-Eigenschaft liegt genau dann vor, wenn die Werte der Gewichtsfunktion für $\nu \rightarrow \infty$ nach null streben, d.h.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{\nu-1} \mathbf{b}_d = 0.$$

- Die BIBO-Eigenschaft liegt genau dann vor, wenn *alle* Pole der z -Übertragungsfunktion *im* Inneren des Einheitskreises liegen.

7.6.4 Methoden zur Stabilitätsüberprüfung

Bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens zeitdiskreter konstanter Systeme überprüft man, ob *sämtliche* n Nullstellen z_i eines Polynoms n -ten Grades⁹ mit reellen Koeffizienten a_i

$$\Delta_n(z) := a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (7.75)$$

innerhalb des Einheitskreises liegen, d.h. ob die Ungleichungen

$$|z_i| < 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7.76)$$

erfüllt werden. Man nennt ein Polynom, das *keine* Nullstellen mit der Eigenschaft $|z_i| \geq 1$ besitzt, ein *Einheitskreispolynom*. Es existieren eine Reihe von Verfahren, mit deren Hilfe diese Überprüfung durchgeführt werden kann. Exemplarisch sei hier das Kriterium von

⁹ Hier kann es sich um das charakteristische Polynom der Systemmatrix oder das Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion handeln.

Schur-Cohn angeführt. Es ist das Analogon zum *Hurwitz*-Kriterium. Hierbei untersucht man das Vorzeichen gewisser Determinanten, die mit Hilfe der Koeffizienten des Polynoms $\Delta_n(z)$ gebildet werden. Ein weiteres Verfahren ist das so genannte *Abbauverfahren*, bei dem man ähnlich wie beim wohl bekannten *Routh*-Schema vorgeht.

Wir verzichten an dieser Stelle auf die Demonstration der angeführten numerischen Stabilitätskriterien und verweisen auf die entsprechende Spezialliteratur [1, 29]. In den nachfolgenden Ausführungen werden wir bei der Stabilitätsuntersuchung einen „Ausweichweg“ einschlagen: Ausgehend von $\Delta_n(z)$ wird durch eine geeignete *Transformation* der Variablen z in die neue Variable q ein Polynom n -ten Grades $\Delta_n(q)$ erzeugt. Statt zu überprüfen, ob $\Delta_n(z)$ ein Einheitskreispolynom ist, überprüft man nun mit wohl bekannten Verfahren, ob das so entstandene Polynom $\Delta_n(q)$ ein *Hurwitz*-Polynom ist!

Wir wollen allerdings zunächst *einfache* (notwendige bzw. hinreichende) Bedingungen angeben, die eine *leichte* Vorabüberprüfung des Stabilitätsverhaltens ermöglichen.

Zwei einfach zu überprüfende *notwendige* Bedingungen:

Das zu untersuchende Polynom nach (7.75) kann folgendermaßen faktorisiert werden:

$$\begin{aligned}\Delta_n(z) &= a_n \prod_{i=1}^m (z + \alpha_i) \prod_{k=1}^l (z + \beta_k + j\gamma_k)(z + \beta_k - j\gamma_k) \\ &= a_n \prod_{i=1}^m (z + \alpha_i) \prod_{k=1}^l [(z + \beta_k)^2 + \gamma_k^2].\end{aligned}$$

Hierbei haben wir angenommen, dass es m reelle und $2l$ konjugiert komplexe Nullstellen besitzt. *Falls* alle Nullstellen *im* Einheitskreis liegen, so können wir leicht eine Aussage über das Vorzeichen des Wertes von $\Delta_n(z)$ an der Stelle $z = +1$ bzw. $z = -1$ treffen. Es gilt

$$\Delta_n(\pm 1) = a_n \prod_{i=1}^m (\pm 1 + \alpha_i) \prod_{k=1}^l [(\pm 1 + \beta_k)^2 + \gamma_k^2].$$

Offensichtlich kommt es auf das Vorzeichen des ersten Produktausdruckes

$$a_n \prod_{i=1}^m (\pm 1 + \alpha_i)$$

an, da der zweite immer positiv ist.

Unter der Annahme $|\alpha_i| < 1$ folgert man daraus unmittelbar folgende *notwendigen* Bedingungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}[\Delta_n(+1)] &= \operatorname{sgn}(a_n) \\ \operatorname{sgn}[\Delta_n(-1)] &= (-1)^n \operatorname{sgn}(a_n).\end{aligned}$$

Eine einfach zu überprüfende *hinreichende* Bedingung:

Falls die Koeffizienten des Polynoms $\Delta_n(z)$ die Ungleichungen

$$a_n > a_{n-1} > \dots > a_1 > a_0 > 0$$

erfüllen, so ist $\Delta_n(z)$ ein Einheitskreispolynom. Die Gültigkeit dieses Satzes ist allerdings leider nicht leicht einsichtig.

Anwendung einer bilinearen Transformation

Eine interessante Möglichkeit zur Stabilitätsüberprüfung ergibt sich, indem man das vorliegende „zeitdiskrete“ Stabilitätsproblem auf das gelöste „zeitkontinuierliche“ Stabilitätsproblem zurückführt! Man benutzt hierfür eine bilineare Transformation

$$z = \frac{1+q}{1-q} \quad (7.77)$$

bzw. nach q aufgelöst

$$q = \frac{z-1}{z+1}. \quad (7.78)$$

Man bildet dadurch die komplexe z -Ebene in die komplexe q -Ebene ab (vgl. Abb. 7.2).

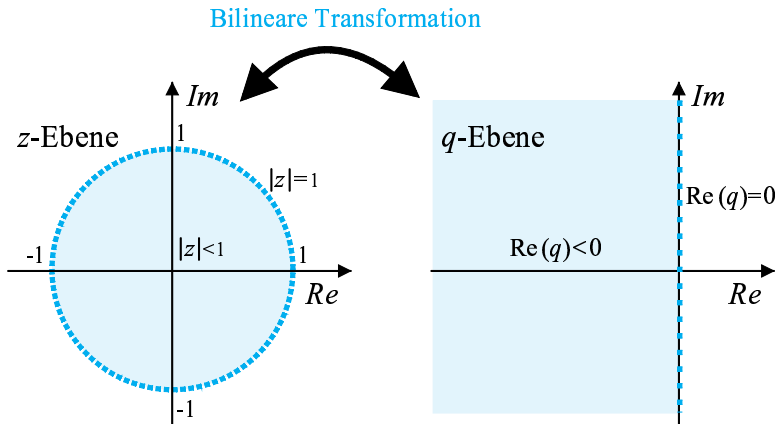


Abbildung 7.2: Zur bilinearen Transformation

Diese (konforme) Abbildung hat bemerkenswerte Eigenschaften¹⁰:

¹⁰ Die allgemeine bilineare Transformation

$$z = \frac{1 + \frac{q}{\gamma}}{1 - \frac{q}{\gamma}},$$

wobei γ ein reeller positiver Skalierungsfaktor ist, weist dieselben Eigenschaften auf! Insbesondere bei dem Regelkreisentwurf mit Hilfe von *Bode*-Diagrammen wird $\gamma = \frac{2}{T_d}$ angesetzt.

- Punkte der z -Ebene *auf dem Einheitskreis* werden in solche *auf der imaginären Achse* der q -Ebene transformiert:

$$|z| = 1 \leftrightarrow \operatorname{Re}(q) = 0.$$

- Punkte der z -Ebene *im Einheitskreis* entsprechen Punkten der q -Ebene *links der imaginären Achse* der q -Ebene

$$|z| < 1 \leftrightarrow \operatorname{Re}(q) < 0.$$

Letzter Umstand ist einleuchtend: Betrachtet man die Ungleichung $|z| < 1$, so ist diese der Ungleichung

$$\left| \frac{1+q}{1-q} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |1+q| < |1-q|$$

äquivalent. Sie ist nur für komplexe Werte q mit negativem Realteil erfüllbar (vgl. Abb. 7.3).

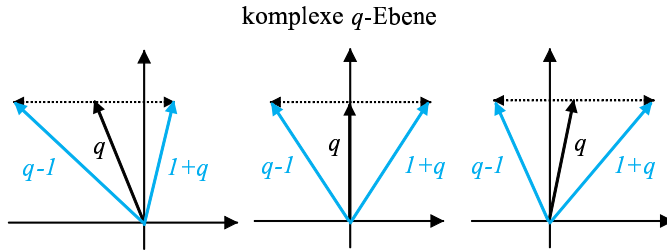


Abbildung 7.3: Zur konformen Abbildung

Die Stabilitätsuntersuchung wird folgendermaßen durchgeführt: Ausgehend vom Polynom $\Delta_n(z)$ wird durch Anwendung der bilinearen Transformation (7.77) ein Polynom $\hat{\Delta}_n(q)$ erzeugt. Es wird zunächst

$$\Delta_n\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = a_n\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + a_0$$

gebildet; daraus entsteht ein Polynom in der Variablen q :

$$\hat{\Delta}_n(q) = (1-q)^n \Delta_n\left(\frac{1+q}{1-q}\right). \quad (7.79)$$

Entscheidend ist, dass die Lage der Nullstellen von $\hat{\Delta}_n(q)$ bezüglich der imaginären Achse *dieselbe* ist wie die der Nullstellen von $\Delta_n(z)$ bezüglich des Einheitskreises. Damit gilt, dass $\Delta_n(z)$ *genau dann* ein Einheitskreispolynom ist, wenn $\hat{\Delta}_n(q)$ ein *Hurwitz*-Polynom ist. Mit diesem Ergebnis können wir auf alle Erkenntnisse und numerische Verfahren des „zeitkontinuierlichen“ Falls zurückgreifen.

Beispiel: Wir betrachten ein Polynom 2. Grades:

$$\Delta_2(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

und wollen für die reellen Koeffizienten a_i notwendige und hinreichende Bedingungen aufstellen, damit $\Delta_2(z)$ ein Einheitskreispolynom ist. Wir unterwerfen die komplexe Variable z der bilinearen Transformation und erhalten

$$\Delta_2\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 + a_1\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + a_0.$$

Durch Multiplikation mit $(1-q)^2$ ergibt sich das Polynom

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_2(q) &= (1+q)^2 + a_1(1+q)(1-q) + a_0(1-q)^2 \\ &= (1-a_1+a_0)q^2 + 2(1-a_0)q + (1+a_1+a_0).\end{aligned}$$

Damit $\hat{\Delta}_2(q)$ ein Hurwitz-Polynom ist, müssen alle seine Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben. Diese Bedingungen ergeben zwei Fälle:

1. Fall: $1 - a_1 + a_0 < 0, \quad 1 - a_0 < 0, \quad 1 + a_1 + a_0 < 0$
2. Fall: $1 - a_1 + a_0 > 0, \quad 1 - a_0 > 0, \quad 1 + a_1 + a_0 > 0.$

Der 1. Fall führt zu einem Widerspruch. Es gelten dann die unter dem 2. Fall angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$1 - a_1 + a_0 > 0, \quad 1 - a_0 > 0, \quad 1 + a_1 + a_0 > 0.$$

7.7 Der digitale Regelkreis

7.7.1 Einführung

Der Einsatz eines Digitalrechners zum Zweck der Regelung eines Systems stellt heute den Normalfall dar. Implementierte Regelkreise beinhalten meist „digitale Regler“ (μ -Prozessoren, Signalprozessoren, Computer etc.). Wichtige Gründe hierfür sind u.a. extrem sinkende Kosten durch Fortschritte im Bereich der Mikroelektronik und die im Vergleich zu „analogen Reglern“ hohe Flexibilität [4, 11, 1, 29]. In Abb. 7.4 ist ein einfacher digitaler Regelkreis schematisch dargestellt.

Wir gehen auf dessen *idealisiertes Funktionsprinzip* kurz ein: Das zeitkontinuierliche System (Regelstrecke), dessen Verhalten beeinflusst werden soll, besitzt die skalare Eingangsgröße $u(t)$ und die skalare Ausgangsgröße (Messgröße) $y(t)$. Es werden diesem System nun zu *diskreten* Zeitpunkten t_i

$$t_i = iT_d \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.80)$$

Meßwerte entnommen. Zur Verarbeitung dieser Werte in einem Rechner werden sie in eine adäquate „digitale“ Form konvertiert und diesem zugeführt. Dieser Prozess der Umwandlung des zeitkontinuierlichen (analogen) Signals in ein solches in digitaler Form wird

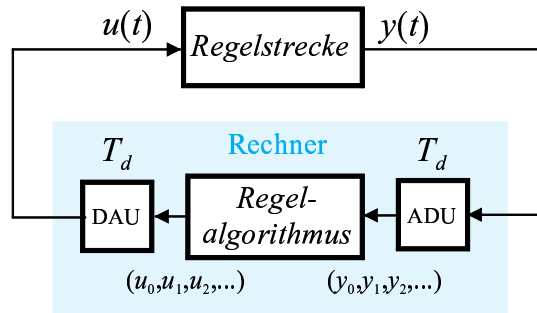


Abbildung 7.4: Digitaler Regelkreis

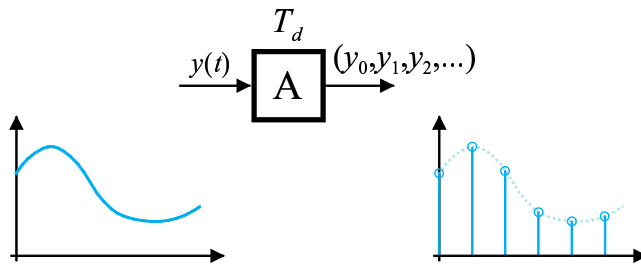


Abbildung 7.5: Abtaster

durch einen idealen¹¹ *A/D-Umsetzer* (ADU), auch „Abtaster“ genannt, durchgeführt (siehe Abb. 7.5).

Der Rechner erhält demnach eine Folge von Zahlen $y_i = y(t_i)$, die er aufgrund eines programmierten Algorithmus verarbeitet, um daraus eine Folge von Werten u_i zu erzeugen. Es ist einleuchtend, dass die Berechnung der Werte u_i eine gewisse Zeit benötigt, die im Vergleich zu T_d hinreichend klein sein muss. Aus diesem Grund wird sie vernachlässigt. Die Werte u_i werden nun mit Hilfe eines idealen *D/A-Umsetzers* (DAU) in ein analoges Signal konvertiert (siehe auch Abschnitt 7.4.4), das dem betrachteten System als Eingangsgröße zugeführt wird. Die notwendige Synchronisation aller erwähnten Ereignisse wird meist durch eine „Uhr“ im Rechner übernommen.

Es handelt sich offensichtlich um die Zusammenschaltung eines zeitkontinuierlichen Systems mit einem zeitdiskreten! Die mathematische Behandlung des resultierenden Gesamtsystems ist aufgrund der unterschiedlichen Natur der Teilsysteme zweifellos nicht einfach. Es ist nahe liegend, die Frage zu stellen, ob man die zeitkontinuierliche Beschreibung der Regelstrecke durch eine *äquivalente zeitdiskrete* ersetzen kann. Dadurch wäre eine einheitliche zeitdiskrete Beschreibung des Gesamtsystems möglich, was natürlich von Vorteil ist. Dieser grundlegenden Frage ist der folgende Abschnitt gewidmet.

¹¹ Wir gehen davon aus, dass diese Wandlung *ohne* Zeitverzug und *fehlerfrei* durchgeführt wird.

7.7.2 Ein diskreter Simulator

Wir gehen davon aus, dass die Regelstrecke durch ein lineares, zeitinvariantes Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (7.81)$$

der Ordnung n hinreichend genau beschrieben wird. Wir entwerfen nun ein zeitdiskretes System

$$\xi_{i+1} = \mathbf{A}_d \xi_i + \mathbf{b}_d u_i \quad \eta_i = \mathbf{c}_d^T \xi_i \quad (7.82)$$

mit der Eingangsgröße u_i , der Ausgangsgröße η_i und dem Zustandsvektor ξ_i . Das Ziel, das dabei verfolgt wird, besteht darin, die Größen \mathbf{A}_d , \mathbf{b}_d und \mathbf{c}_d so zu bestimmen, dass bei gegebener Diskretisierungszeit T_d , gegebenem Anfangszustand $\xi_0 = \mathbf{x}(0)$ und vorgegebener Eingangsgröße $u_i = u(iT_d)$ für $i \geq 0$ gilt:

$$\xi_i = \mathbf{x}(iT_d) \quad \text{und} \quad \eta_i = y(iT_d) \quad \text{für } i \geq 0. \quad (7.83)$$

Ein System mit dieser Eigenschaft nennen wir einen *diskreten Simulator*.

Man kann sich vorstellen, dass solch ein Anliegen für *beliebige* Zeitverläufe der Eingangsgröße *nicht* erfüllt werden kann. Hierzu ein Beispiel: Wir setzen asymptotische Stabilität des zeitkontinuierlichen (7.81) und des zeitdiskreten (7.82) Systems voraus und wählen die harmonische Eingangsgröße

$$u(t) = e^{j\omega t}.$$

Dann wissen wir, dass im stationären Fall die Verläufe der Ausgangsgrößen mit Hilfe des Frequenzganges durch

$$y(t) = P(j\omega)e^{j\omega t} \quad \text{mit } P(j\omega) = \mathbf{c}^T(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

bzw.

$$\eta_i = P_d(e^{j\omega T_d})e^{j\omega iT_d} \quad \text{mit } P_d(e^{j\omega T_d}) = \mathbf{c}_d^T(e^{j\omega T_d}\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{b}_d$$

gegeben sind. Für den Frequenzgang $P_d(e^{j\omega T_d})$ des gesuchten diskreten Simulators muss demnach für *alle* Werte von ω folgende Beziehung gelten:

$$P_d(e^{j\omega T_d}) = P(j\omega).$$

Bedenkt man die Periodizität von $P_d(e^{j\omega T_d})$, erkennt man, dass obige Gleichung *nicht* erfüllbar ist!

Wir müssen die Klasse der Eingangsfunktionen $u(t)$ also einschränken! Hierzu betrachten wir die allgemeine Lösung $\mathbf{x}(t)$ des zeitkontinuierlichen Systems (7.81) für $t = T_d$

$$\mathbf{x}(T_d) = e^{\mathbf{A}T_d}\mathbf{x}(0) + \int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}(T_d-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau. \quad (7.84)$$

Es wird *gewünscht*, dass der Zustandsvektor ξ_1 des diskreten Systems (7.82), d.h.

$$\xi_1 = \mathbf{A}_d \xi_0 + \mathbf{b}_d u_0, \quad (7.85)$$



Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als persönliche Einzelplatz-Lizenz zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschliesslich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs
- und der Veröffentlichung

bedarf der schriftlichen Genehmigung des Verlags.

Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: info@pearson.de

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website



herunterladen