

**et**  
elektrotechnik

John G. Proakis  
Masoud Salehi

# Grundlagen der Kommunikationstechnik

2. Auflage



Da das Rauschen  $n_1(t)$  am Eingang zur Schleife additiv ist, beträgt die Varianz des Phasenfehlers  $\Delta\varphi$ , die gleichermaßen die Varianz der VCO-Ausgangsphase ist,

$$\sigma_{\hat{\varphi}}^2 = \frac{N_0 B_{\text{neq}}}{A_c^2} \quad (5.2.20)$$

wobei  $B_{\text{neq}}$  die (einseitige) äquivalente Rauschbandbreite der Schleife repräsentiert, die in Gleichung (5.2.12) gegeben ist. Es ist festzustellen, dass  $A_c^2/2$  die Leistung des monochromatischen Eingangssignals und  $\sigma_{\hat{\varphi}}^2$  nichts weiter als das Verhältnis der gesamten Rauschleistung innerhalb der Bandbreite der PLL dividiert durch die Signalleistung ist. Daher:

$$\sigma_{\hat{\varphi}}^2 = \frac{1}{\varrho_L} \quad (5.2.21)$$

wobei  $\varrho_L$  der SNR ist:

$$\varrho_L = \frac{A_c^2/2}{B_{\text{neq}} N_0/2} \quad (5.2.22)$$

Deshalb ist die Varianz von  $\hat{\varphi}$  umgekehrt proportional zu dem SNR.

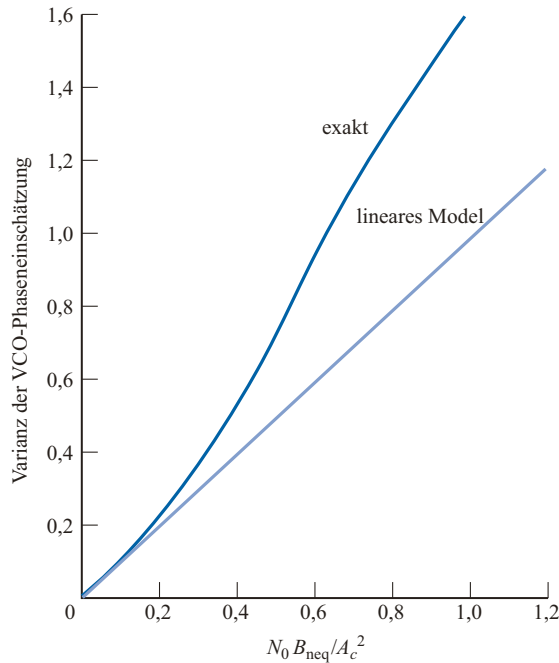
Der Ausdruck für die Varianz  $\sigma_{\hat{\varphi}}^2$  des VCO-Phasenfehlers bezieht sich auf Fälle, bei denen der SNR hinreichend groß ist, so dass das lineare Modell für die PLL gilt. Eine exakte Analyse auf der Basis einer nichtlinearen PLL ist mathematisch formbar, wenn  $G(s) = 1$ , was wiederum eine Schleife erster Ordnung zur Folge hat. In diesem Fall kann die PDF für den Phasenfehler abgeleitet werden [siehe Viterbi (1966)] und hat die Form

$$f(\Delta\varphi) = \frac{\exp(\varrho_L \cos \Delta\varphi)}{2\pi I_0(\varrho_L)} \quad (5.2.23)$$

wobei  $\varrho_L$  der in Gleichung (5.2.22) definierte SNR,  $B_{\text{neq}}$  die entsprechende äquivalente Rauschbandbreite der Schleife erster Ordnung und  $I_0(\cdot)$  die modifiziert Bessel-Funktion der nullten Ordnung ist.

Aus dem Ausdruck für  $f(\Delta\varphi)$  kann der Wert für die Varianz  $\sigma_{\hat{\varphi}}^2$  des Phasenfehlers einer PLL erster Ordnung ermittelt werden. Dieser wird in Abb. 5.8 als eine Funktion von  $1/\varrho_L$  grafisch dargestellt. Zum Vergleich ist auch das Ergebnis, das mit dem linearisierten PLL-Modell erzielt wird, aufgeführt. Es ist zu beobachten, dass die Varianz für lineare Modelle sehr nah an der exakten Varianz für  $\varrho_L > 3$  liegt. Daher ist das lineare Modell angemessen für praktische Zwecke.

Nährungsanalysen der statistischen Eigenschaften des Phasenfehlers für nichtlineare PLL sind ebenfalls durchgeführt worden. Von besonderer Bedeutung ist der Einschaltvorgang (transientes Verhalten) der nichtlinearen PLL während ihrer Anfangserfassung. Ein weiterer bedeutungsvoller Problembereich ist das Verhalten der PLL bei niedrigem SNR. So wird zum Beispiel, wenn der SNR am Eingang zur PLL unter einen gewissen Wert fällt, die Funktionsweise der PLL zusehends beeinträchtigt. Die Schleife beginnt das Einrasten zu verlieren. Zusätzlich wird ein impulsartiges Rauschen erzeugt, das man als Knackgeräusche wahrnimmt und die Funktionalität der Schleife massiv stört. Mehr Informationen zu diesem Thema können in den Werken von Viterbi (1966), Lindsey (1972), Lindsey und Simon (1973) sowie von Gardner (1979) und in den Überblicksveröffentlichungen von Gupta (1975) sowie von Lindsey und Chie (1981) gefunden werden.



**Abbildung 5.8:** Vergleich zwischen exakter und approximierter PLL erster Ordnung (linear) bezüglich der Phasenvarianz des VCO nach Viterbi (1966)

## Quadrierungsschleife

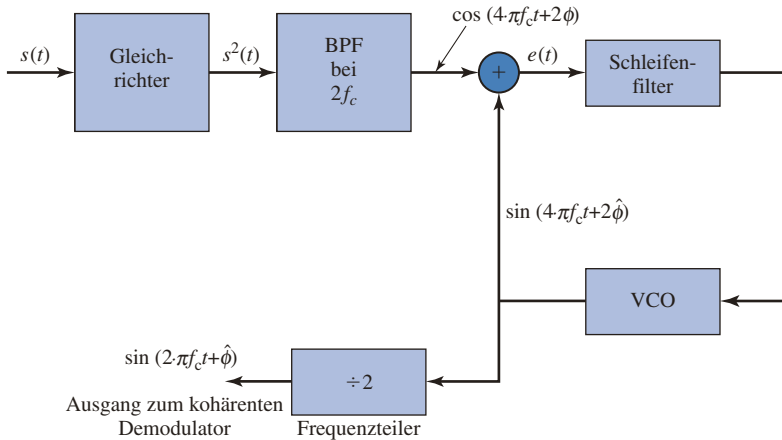
Nachdem die Wirkung von Rauschen auf die Funktionsweise einer PLL dargelegt worden ist, kommen wir auf das Problem der Trägersynchronisation basierend auf dem in Abb. 5.9 veranschaulichten System zurück. Durch Quadrieren des empfangenen Signals, das einen Frequenzanteil um  $2f_c$  erzeugt, wird die Rauschleistung am Eingang der PLL erhöht und somit die Varianz des Phasenfehlers vergrößert.

Um diesen Aspekt zu vertiefen, nehmen wir an, dass der Eingang zu dem Quadrierer  $u(t) + n(t)$  sei. Folglich ist der Ausgang

$$y(t) = u^2(t) + 2u(t)n(t) + n^2(t) \quad (5.2.24)$$

Die Rauschterme sind  $2u(t)n(t)$  und  $n^2(t)$ . Durch die Berechnung der Autokorrelation sowie der Leistungsspektraldichte dieser zwei Rauschanteile kann bewiesen werden, dass diese Anteile jeweils eine Spektralleistung im Frequenzband um  $2f_c$  aufweisen. Folglich lässt das Bandpassfilter mit der Bandbreite  $B_{\text{neq}}$ , welcher um  $2f_c$  zentriert ist und den erwünschten monochromatischen Anteil erzeugt, der die PLL antreibt, aufgrund dieser zwei Rauschterme auch Rauschstörungen durch.

Die Bandbreite der Schleife wird wesentlich kleiner als die Bandbreite  $B_{bp}$  des Bandpassfilters gewählt, so dass das Gesamtrauschspektrum am Eingang der PLL innerhalb der Schleifenbandbreite als Konstante approximiert werden kann. Mit Hilfe dieser Näherung ist es möglich die Varianz des Phasenfehlers auf eine unkomplizierte Weise



**Abbildung 5.9:** Wiederherstellung des Trägers mittels quadratischer Nichtlinearität

auszudrücken:

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \frac{1}{\varrho_L S_L} \quad (5.2.25)$$

wobei  $S_L$  als Quadrierungsverlust bezeichnet wird und gegeben ist durch

$$S_L = \frac{1}{1 + \frac{B_{bp}/2B_{neq}}{\varrho_L}} \quad (5.2.26)$$

Da  $S_L < 1$ , nimmt die Varianz des Phasenfehlers zu, was auf die hinzugefügte Rauschleistung, bedingt durch das Quadrieren, zurückzuführen ist. Wenn zum Beispiel  $\varrho_L = B_{bp}/2B_{neq}$ , ist ein Verlust von 3 dB nachzuweisen, was einer Zunahme der Varianz in der Einschätzung um den Faktor Zwei entspricht.

Schließlich ist zu beobachten, dass der Ausgang des VCO in der quadrierten Schleife in der Frequenz durch den Faktor Zwei dividiert und in der Phase um  $90^\circ$  gedreht werden muss, um das Trägersignal für die Demodulation des empfangenen Signals zu erzeugen.

## Costas-Schleife

Ein zweites Verfahren für die Generierung eines Trägers mit geeigneter Phase für ein DSB-SC-AM-Signal ist in dem Blockschaltbild in Abb. 5.10 dargestellt. Das empfangene Signal

$$r(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) + n(t)$$

wird mit  $\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$  und  $\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ , den Ausgängen des VCO, multipliziert. Die zwei Produkte sind

$$\begin{aligned} y_c(t) &= [A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \\ &\quad + n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t] \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \end{aligned}$$

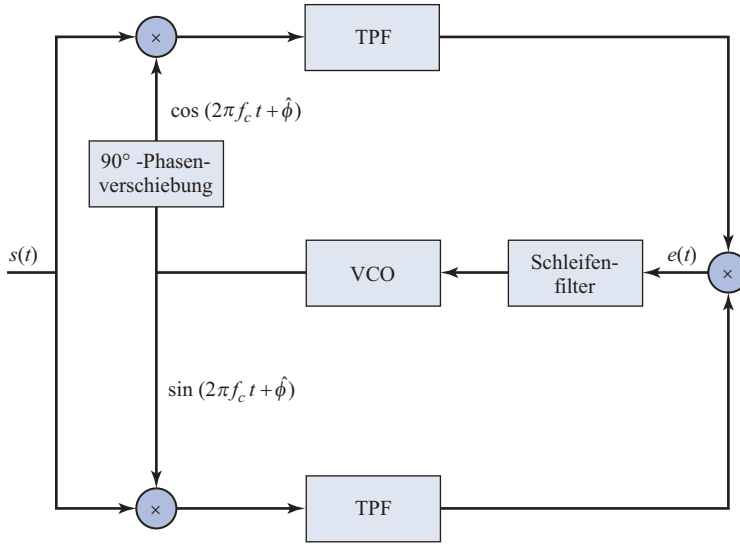


Abbildung 5.10: Blockdiagramm der Costas-Schleife

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A_c}{2} m(t) \cos \Delta \varphi + \frac{1}{2} [n_c(t) \cos \hat{\varphi} + n_s(t) \sin \hat{\varphi}] \\
 &\quad + \text{Terme mit zweifacher Frequenz}
 \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

$$\begin{aligned}
 y_s(t) &= [A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \\
 &\quad + n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t] \sin(2\pi f_c t + \hat{\varphi}) \\
 &= \frac{A_c}{2} m(t) \sin \Delta \varphi + \frac{1}{2} [n_c(t) \sin \hat{\varphi} - n_s(t) \cos \hat{\varphi}] \\
 &\quad + \text{Terme mit zweifacher Frequenz}
 \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

wobei  $\Delta \varphi = \hat{\varphi} - \varphi$ . Die Doppelfrequenzterme werden mit Hilfe von Tiefpassfiltern herausgefiltert, die den Multiplizierern folgen.

Ein Fehlersignal wird durch das Multiplizieren der zwei Ausgänge  $y'_c(t)$  und  $y'_s(t)$  der Tiefpassfilter erzeugt. Somit

$$\begin{aligned}
 e(t) &= y'_c(t) y'_s(t) \\
 &= \frac{A_c^2}{8} m^2(t) \sin 2\Delta \varphi + \frac{A_c}{4} m(t) [n_c(t) \cos \hat{\varphi} + n_s(t) \sin \hat{\varphi}] \sin \Delta \varphi \\
 &\quad + \frac{A_c}{4} m(t) [n_c(t) \sin \hat{\varphi} - n_s(t) \cos \hat{\varphi}] \cos \Delta \varphi \\
 &\quad + \frac{1}{4} [n_c(t) \cos \hat{\varphi} + n_s(t) \sin \hat{\varphi}] [n_c(t) \sin \hat{\varphi} - n_s(t) \cos \hat{\varphi}]
 \end{aligned}$$

Dieses Fehlersignal wird durch den Schleifenfilter gefiltert, dessen Ausgang die Steuerungsspannung ist, die den VCO antreibt.

Es ist festzustellen, dass das Fehlersignal im Schleifenfilter aus einem gewünschten Term  $(A_c^2 m^2(t)/8) \sin 2\Delta\varphi$  und zusätzlichen Termen, die  $\text{Signal} \times \text{Rauschen}$  und  $\text{Rauschen} \times \text{Rauschen}$  enthalten, besteht. Diese ähneln den zwei Rauschtermen am Eingang der PLL beim Quadrierverfahren. Ist das Schleifenfilter in der Costas-Schleife identisch mit jenem, der in Quadrierungsschleifen verwendet wird, sind die zwei äquivalent. Unter diesen Bedingungen sind PDF des Phasenfehlers sowie Funktionsweisen der Schleifen identisch.

Abschließend ist zu bemerken, dass Quadrierungs-PLL und Costas-PLL zwei praktische Verfahren für das Ableiten einer Trägerphaseneinschätzung in der synchronen Demodulation eines DSB-SC-AM-Signals sind.

## 5.3 Einfluss des Rauschens auf die Winkelmodulation

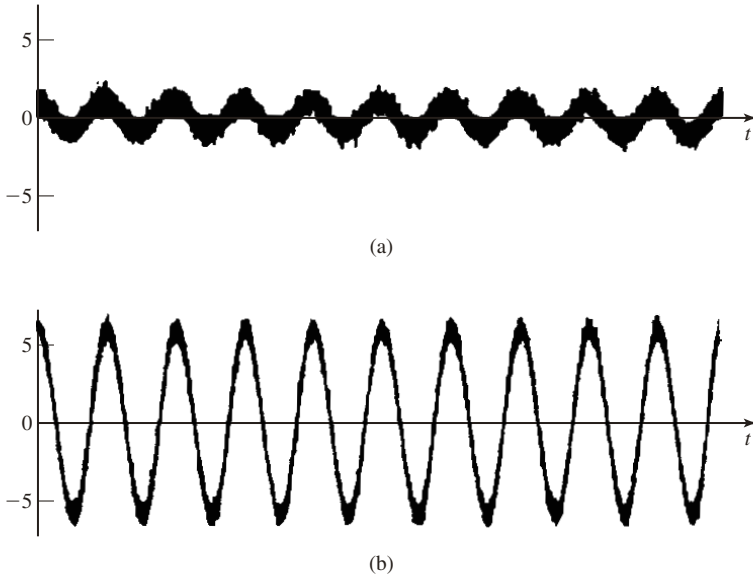
In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der winkelmodulierten Signale, die durch additives weißes gaußsches Rauschen kontaminiert sind, untersucht und in Bezug auf deren Leistungsfähigkeit mit amplitudenmodulierten Signalen verglichen. Bei der Amplitudenmodulation muss beachtet werden, dass die Nachrichteninformationen in der Amplitude des modulierten Signals enthalten sind. Da das Rauschen additiv ist, wird es direkt zum Signal hinzugefügt. Dagegen wird bei frequenzmodulierten Signalen das Rauschen zur Amplitude addiert, während die Nachrichteninformationen in der Frequenz des Signals enthalten sind. Deswegen wird die Nachricht durch additives Rauschen zu einem Ausmaß kontaminiert, das der Veränderung der Frequenz des modulierten Signals entspricht. Die Frequenz eines Signals kann durch Nulldurchgänge beschrieben werden. Somit ist es möglich den Einfluss des additiven Rauschens auf demodulierte FM-Signale durch die Verschiebung der Nulldurchgänge im modulierten FM-Signal auszudrücken. In Abb. 5.11 ist dieser Effekt anhand von zwei Signalen aufgeführt — mit hoher bzw. geringer Leistung. Aus der genannten Erläuterung und Abb. 5.11 sollte klar werden, dass die Wirkung von Rauschen auf FM-Systeme weniger Einfluss nimmt als auf AM-Systeme. Zusätzlich ist zu erkennen, dass Rauschen FM-Systeme mit niedriger Leistung deutlich stärker beeinträchtigt als Systeme mit hoher Leistung. Die in diesem Kapitel aufgeführten Analysen stützen und verifizieren diese Beobachtungen.

Das Blockschaltbild eines Empfängers für ein winkelmoduliertes Signal ist in Abb. 5.12 zu sehen. Das winkelmodulierte Signal<sup>2</sup> wird wie folgt dargestellt:

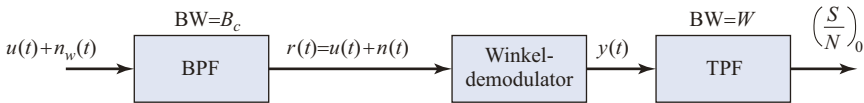
$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) \\ &= \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau), & \text{FM} \\ A_c \cos(2\pi f_c t + k_p m(t)), & \text{PM} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Das additive weiße gaußsche Rauschen  $n_w(t)$  wird zu  $u(t)$  addiert und das Ergebnis durch ein rauschbegrenzendes Filter übertragen, dessen Aufgabe darin besteht, die Rauschan-

<sup>2</sup> Mit dem Ausdruck „moduliertes Signal“ beziehen wir uns auf das Signal, das am Empfänger vorhanden ist. Deshalb steht die Signalleistung für jene Leistung, die im empfangenen Signal enthalten ist, und nicht für die Übertragungsleistung.



**Abbildung 5.11:** Einfluss des Rauschens auf die Nullübergänge von modulierten Signalen (a) schwacher Leistung und (b) starker Leistung



**Abbildung 5.12:** Blockdiagramm eines Empfängers für allgemeine Winkelmodulation

teile zu entfernen, die außerhalb des Bandes liegen. Die Bandbreite des Filters und des modulierten Signals sind identisch, was den positiven Nebeneffekt hat, dass das modulierte Signal ohne Verzerrung durchgeleitet wird. Da aber die Rauschanteile außerhalb des Bandes beseitigt werden, ist das Rauschen am Ausgang des Filters ein gaußsches Bandpassrauschen, das durch  $n(t)$  dargestellt wird. Der Ausgang dieses Filters ist

$$\begin{aligned} r(t) &= u(t) + n(t) \\ &= u(t) + n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Wie bei konventionellen AM-Rauschanalysen ist eine präzise Untersuchung aufgrund der Nichtlinearität des Demodulationsprozesses kompliziert. Wir setzen voraus, dass die Signalleistung viel höher als die Rauschleistung ist. Wenn nun das Bandpassrauschen dargestellt wird als

$$\begin{aligned} n(t) &= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \cos \left( 2\pi f_c t + \arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)} \right) \\ &= V_n(t) \cos(2\pi f_c t + \Phi_n(t)) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

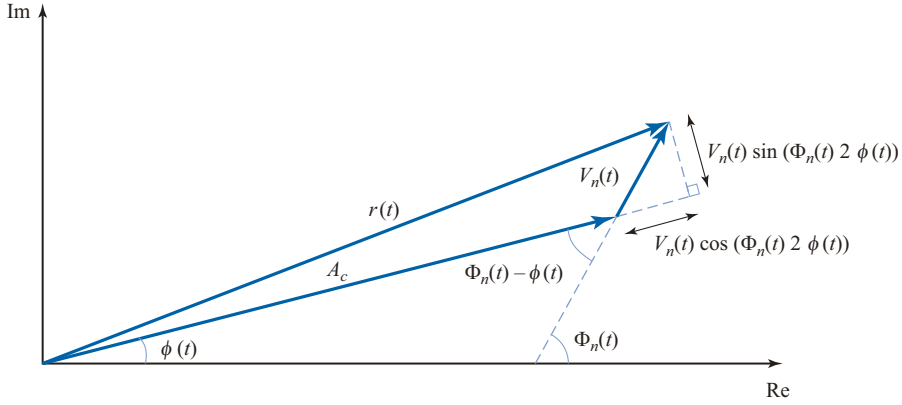
wobei  $V_n(t)$  und  $\Phi_n(t)$  jeweils die Einhüllende und Phase des Bandpassrauschprozesses darstellen, bedeutet die Annahme, dass das Signal bedeutend größer als das Rauschen



ist, Folgendes:

$$p(V_n(t) \ll A_c) \approx 1 \quad (5.3.4)$$

Die Zeigerdiagramme des Signals und des Rauschens sind in Abb. 5.13 zu sehen.



**Abbildung 5.13:** Zeigerdiagramm für das Signal und das Rauschen in einem Winkelmodulationssystem

Aus dieser Abbildung wird deutlich, dass Folgendes geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} r(t) &\approx \left( A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \varphi(t)) \right) \cos \left( 2\pi f_c t + \varphi(t) \right) \\ &\quad + \arctan \frac{V_n(t) \sin(\Phi_n(t) - \varphi(t))}{A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \varphi(t))} \\ &\approx \left( A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \varphi(t)) \right) \\ &\quad \times \cos \left( 2\pi f_c t + \varphi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \varphi(t)) \right) \end{aligned}$$

Der Demodulator bearbeitet dieses Signal. Sein Ausgang wird, je nachdem ob es ein Phasen- oder Frequenzdemodulator ist, die Phase oder die augenblickliche Frequenz dieses Signals sein.<sup>3</sup> Wenn man daher beachtet, dass

$$\varphi(t) = \begin{cases} k_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases} \quad (5.3.5)$$

ist der Ausgang des Demodulators gegeben durch

$$y(t) = \begin{cases} k_p m(t) + Y_n(t), & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t), & \text{FM} \end{cases}$$

<sup>3</sup> Natürlich ist bei FM der Demodulatorausgang die augenblickliche Frequenzabweichung des Signals  $v(t)$  von der Trägerfrequenz  $f_c$ .

$$= \begin{cases} k_p m(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \varphi(t)), & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \varphi(t)), & \text{FM} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

wobei zuvor festgelegt wurde, dass

$$Y_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \varphi(t)) \quad (5.3.7)$$

Der erste Term in den Gleichungen (5.3.5–5.3.7) ist der erwünschte Signalanteil, der zweite Term ist der Rauschanteil. Dieser Ausdruck veranschaulicht, dass der Rauschanteil umgekehrt proportional zur Signalamplitude  $A_c$  ist. Daher gilt: Je höher das Signalebene, desto niedriger ist sein Rauschniveau. Dies stimmt mit der intuitiven Argumentation überein, die am Anfang dieses Abschnitts, basierend auf Abb. 5.11, formuliert wurde. Es ist anzumerken, dass dies nicht auf die Amplitudenmodulation übertragbar ist. In AM-Systemen ist der Rauschanteil unabhängig vom Signalanteil und eine Skalierung der Signalleistung beeinflusst nicht die empfangene Rauschleistung.

Wir werden nun die Eigenschaften der Rauschkomponente untersuchen, die gegeben ist als

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \varphi(t)) \\ &= \frac{1}{A_c} [V_n(t) \sin \Phi_n(t) \cos \varphi(t) - V_n(t) \cos \Phi_n(t) \sin \varphi(t)] \\ &= \frac{1}{A_c} [n_s(t) \cos \varphi(t) - n_c(t) \sin \varphi(t)] \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Die Autokorrelationsfunktion dieses Prozesses ist gegeben als

$$\begin{aligned} E[Y_n(t + \tau)Y_n(t)] &= \frac{1}{A_c^2} E[R_{n_s}(\tau) \cos(\varphi(t)) \cos(\varphi(t + \tau)) \\ &\quad + R_{n_c}(\tau) \sin(\varphi(t + \tau)) \sin(\varphi(t))] \\ &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) E[\cos(\varphi(t + \tau) - \varphi(t))] \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

wobei die Tatsache berücksichtigt wurde, dass der Rauschprozess stationär ist und  $R_{n_c}(\tau) = R_{n_s}(\tau)$  sowie  $R_{n_c n_s}(\tau) = 0$  [siehe Gleichung (4.6.1) und Beispiel (4.6.1)]. Wir nehmen nun an, dass die Nachricht  $m(t)$  eine Probefunktion eines mittelwertlosen stationären gaußschen Prozesses  $M(t)$  mit der Autokorrelationsfunktion  $R_M(\tau)$  sei. Dann ist sowohl bei der PM als auch bei der FM-Modulation  $\varphi(t)$  eine Probefunktion eines mittelwertlosen stationären gaußschen Prozesses  $\Phi(t)$ . Für PM ist dies offensichtlich, weil

$$\Phi(t) = k_p M(t) \quad (5.3.10)$$

und für FM gilt

$$\Phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t M(\tau) d\tau \quad (5.3.11)$$

Beachtet man, dass  $\int_{-\infty}^t$  eine lineare zeitlich invariante Operation darstellt, wird deutlich, dass in diesem Fall  $\Phi(t)$  der Ausgang eines LTI-Systems ist, dessen Eingang ein mittel-

wertloser stationärer gaußscher Prozess ist. Folglich ist  $\Phi(t)$  ebenfalls ein mittelwertloser stationärer gaußscher Prozess.

An einer beliebig festgesetzten Zeit  $t$  ist die Zufallsvariable  $Z(t, \tau) = \Phi(t + \tau) - \Phi(t)$  die Differenz zwischen den beiden gaußschen Verbundzufallsvariablen. Deswegen ist sie selbst eine gaußsche Zufallsvariable mit einem Mittelwert von null und der Varianz

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= E[\Phi^2(t + \tau)] + E[\Phi^2(t)] - 2R_\Phi(\tau) \\ &= 2[R_\Phi(0) - R_\Phi(\tau)]\end{aligned}\quad (5.3.12)$$

Wird nun dieses Ergebnis in Gleichung (5.3.9) eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned}E[Y_n(t + \tau)Y_n(t)] &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) E[\cos(\Phi(t + \tau) - \Phi(t))] \\ &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) \operatorname{Re}[E e^{j(\Phi(t + \tau) - \Phi(t))}] \\ &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) \operatorname{Re}[E e^{jZ(t, \tau)}] \\ &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) \operatorname{Re}[e^{-\frac{1}{2}\sigma_Z^2}] \\ &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) \operatorname{Re}[e^{-(R_\Phi(0) - R_\Phi(\tau))}] \\ &= \frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) e^{-(R_\Phi(0) - R_\Phi(\tau))}\end{aligned}\quad (5.3.13)$$

wobei Gleichung (4.1.15) benutzt worden ist. Dieses Resultat beweist, dass unter der Annahme einer stationären gaußschen Nachricht der Rauschprozess am Ausgang des Demodulators ebenfalls ein stationärer Prozess ist, dessen Autokorrelationsfunktion wie oben gegeben ist und seine Leistungsspektraldichte

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_Y(f) &= \mathcal{F}[R_Y(\tau)] \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{A_c^2} R_{n_c}(\tau) e^{-(R_\Phi(0) - R_\Phi(\tau))}\right] \\ &= \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} \mathcal{F}[R_{n_c}(\tau) e^{R_\Phi(\tau)}] \\ &= \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} \mathcal{F}[R_{n_c}(\tau) g(\tau)] \\ &= \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} \mathcal{S}_{n_c}(f) \star G(f)\end{aligned}\quad (5.3.14)$$

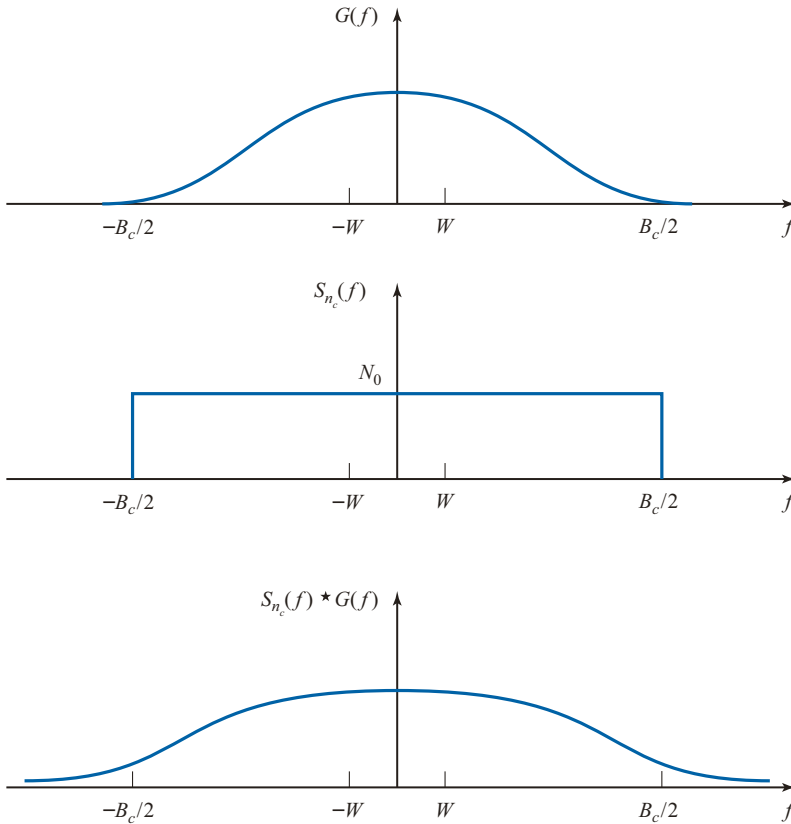
ist, wobei  $g(\tau) = e^{R_\Phi(\tau)}$  und  $G(f)$  seine Fourier-Transformationen sind.

Es kann bewiesen werden (siehe Aufgabe 5.12), dass die Bandbreite von  $g(\tau)$  die Hälfte der Bandbreite  $B_c$  eines winkelmodulierten Signals belegt, die für hohe Modulationsin-

dizes deutlich größer als  $W$  (Nachrichtenbandbreite) ist. Da die Bandbreite eines winkelmodulierten Signals als der Frequenzbereich definiert wurde, der 98 % bis 99 % der Signalleistung enthält, ist  $G(f)$  in der Umgebung von  $|f| = \frac{B_c}{2}$  sehr klein, was zu Folgenden führt:

$$S_{n_c}(f) = \begin{cases} N_0, & |f| < \frac{B_c}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.3.15)$$

Ein typisches Beispiel von  $G(f)$ ,  $S_{n_c}(f)$  und das Resultat ihrer Faltung ist in Abb. 5.14 dargestellt. Weil  $G(f)$  in der Umgebung von  $|f| = \frac{B_c}{2}$  sehr klein ist, hat das resultierende  $S_Y(f)$  ein nahezu flaches Spektrum für  $|f| < W$  (Bandbreite der Nachricht).



**Abbildung 5.14:** Typische Verläufe von  $G(f)$ ,  $S_{n_c}(f)$  und den entsprechenden Faltungen

Aus Abb. 5.14 wird deutlich, dass für alle  $|f| < W$ , Folgendes gilt:

$$S_Y(f) = \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} S_{n_c}(f) \star G(f)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} N_0 \int_{-\frac{B_c}{2}}^{\frac{B_c}{2}} G(f) df \\
&\approx \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df \\
&= \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} N_0 g(\tau) \Big|_{\tau=0} \\
&= \frac{e^{-R_\Phi(0)}}{A_c^2} N_0 e^{R_\Phi(0)} \\
&= \frac{N_0}{A_c^2}
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Es sollte beachtet werden, dass Gleichung (5.3.16) eine angemessene Näherung nur für  $|f| < W$  ist. Dies bedeutet, dass für  $|f| < W$  die Spektren der Rauschanteile in PM sowie FM gegeben sind durch

$$\mathcal{S}_{n_o}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{A_c^2}, & \text{PM} \\ \frac{N_0}{A_c^2} f^2, & \text{FM} \end{cases} \tag{5.3.17}$$

wobei von der Tatsache Gebrauch gemacht wurde, dass der Rauschanteil in FM durch  $\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t)$  gegeben ist, wie bereits aus Gleichung (5.3.6) hervorging. Das Leistungsspektrum des Rauschanteils am Ausgang des Demodulators im Frequenzintervall  $|f| < W$  für PM und FM ist in Abb. 5.15 zu sehen. Es ist interessant, dass PM ein flaches und FM ein parabolisches Leistungsspektrum hat. Deswegen macht sich die Wirkung des Rauschens in FM für hohe Frequenzanteile mehr als für niedrige Frequenzanteile bemerkbar. Die Rauschleistung am Ausgang des Tiefpassfilters ist jene im Frequenzbereich  $[W, +W]$ . Daher wird sie gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_{n_o} &= \int_{-W}^{+W} \mathcal{S}_{n_o}(f) df \\
&= \begin{cases} \int_{-W}^{+W} \frac{N_0}{A_c^2} df, & \text{PM} \\ \int_{-W}^{+W} f^2 \frac{N_0}{A_c^2} df, & \text{FM} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2WN_0}{A_c^2}, & \text{PM} \\ \frac{2N_0W^3}{3A_c^2}, & \text{FM} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Nun kann Gleichung (5.3.6) benutzt werden, um den SNR am Ausgang in der Winkelmodulation zu bestimmen. Zunächst ist die Signalleistung am Ausgang

$$P_{s_o} = \begin{cases} k_p^2 P_M, & \text{PM} \\ k_f^2 P_M, & \text{FM} \end{cases} \tag{5.3.19}$$



## Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als persönliche Einzelplatz-Lizenz zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschliesslich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs
- und der Veröffentlichung

bedarf der schriftlichen Genehmigung des Verlags.

Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: [info@pearson.de](mailto:info@pearson.de)

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website



herunterladen