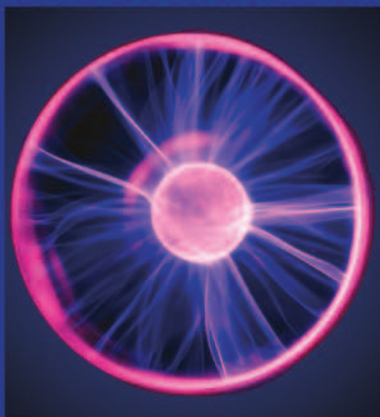
COMPANION WEBSITE
CWS
www.pearson-studium.de

„Bafög"-Ausgabe



et
elektrotechnik

Pascal Leuchtmann

Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie

PEARSON
Studium

Aus dem System (6.38) kann man leicht eine der Feldgrößen eliminieren. Wir wenden auf die erste Gleichung den Operator rot und auf die zweite den Operator $-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}$ an. Dann ergibt sich nach ein paar zulässigen[14] Vertauschungen der Differentiationen

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0 \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad -\mu_0 \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{6.39}$$

Mit Blick auf die Definition des Laplace-Operators, (6.31), und wegen $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ gilt nun

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}, \tag{6.40}$$

eine Gleichung, die die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ nicht mehr enthält.

„Multipliziert“ man die erste Gleichung (6.38) mit $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}$ und wendet rot auf die zweite an, folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \varepsilon_0 \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \tag{6.41}$$

und daraus für $\vec{H}$ eine identische Gleichung wie für $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{H} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}. \tag{6.42}$$

Es handelt sich um die (vektorielle) *Wellengleichung*. Sie verknüpft drei Feldkomponenten untereinander. Mit Hilfe von (6.36) kann aber leicht eine skalare Gleichung für jede *kartesische* Komponente von $\vec{E}$ bzw. $\vec{H}$ angegeben werden. Schreiben wir etwa $\Delta\vec{E}$ in der Wellengleichung (6.40) in der Form (6.36) und multiplizieren das Ganze skalar mit $\vec{e}_x$, dann fallen die y- und z-Komponenten auf beiden Seiten weg, und es bleibt eine skalare Wellengleichung für die x-Komponente E_x von $\vec{E}$:

$$\Delta E_x - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = 0, \tag{6.43}$$

wobei Δ hier der skalare Laplace-Operator ist. Analog können für alle kartesischen Komponenten von $\vec{E}$ und von $\vec{H}$ identische Gleichungen hergeleitet werden. Es ist daher sinnvoll, die Lösung der homogenen, skalaren Wellengleichung allgemein anzugehen.

6.4.3 Die Lösung der homogenen skalaren Wellengleichung

Das Finden von allgemeinen Lösungen der Gleichung (6.43) ist mathematisches Handwerk. Da es sich um eine *partielle* Differentialgleichung handelt, hat (6.43) eine Fülle von Lösungen, die hinterher auf physikalische Relevanz geprüft werden müssen. Das Lösungsverfahren ist ähnlich wie jenes bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: Gesamtlösung = partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung + allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Weil es sich hier um eine *homogene* Gleichung handelt (es gibt keinen Term, wo die unbekannte Funktion E_x nicht vorkommt), können wir uns auf die Ermittlung der allgemeinen Lösung beschränken.

Wir wollen also die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\left(\Delta - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{r}, t) = 0 \tag{6.44}$$

14 Wir setzen nur voraus, dass die Feldgrößen keine Singularitäten aufweisen.

finden, wobei die verkürzte Schreibweise des *Wellenoperators* in der runden Klammer so zu verstehen ist, dass alle Ableitungen auf die Funktion f nach der Klammer wirken, d.h.: $\left(\Delta - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f := \Delta f - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. Zur Lösung machen wir für f den *Separationsansatz*[15]

$$f(x,y,z,t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\cdot T(t), \tag{6.45}$$

d.h. wir nehmen an, die Lösung könne als Produkt von Funktionen geschrieben werden, die nur von je einer Variablen abhängen.[16] Es ist eine schwierige mathematische Aufgabe, herauszufinden, ob damit alle Lösungen gefunden werden können. Wir werden hinterher feststellen, dass für unsere Zwecke hinreichend viele Lösungen herauskommen.

Setzen wir nun den Ansatz (6.45) in (6.44) ein und schreiben den Laplace-Operator mit (6.32) in kartesischen Koordinaten, folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) X\cdot Y\cdot Z\cdot T = \\ X''\cdot Y\cdot Z\cdot T + X\cdot Y''\cdot Z\cdot T + X\cdot Y\cdot Z''\cdot T - \mu_0\varepsilon_0 X\cdot Y\cdot Z\cdot T'' = 0.\end{aligned} \tag{6.46}$$

Dabei bedeuten die beiden Striche ($''$) eine zweifache Ableitung nach dem jeweiligen Argument. Eine Division von (6.46) durch $f = X\cdot Y\cdot Z\cdot T$ liefert

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{K_x} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{K_y} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{K_z} - \mu_0\varepsilon_0 \underbrace{\frac{T''}{T}}_{K_t} = 0. \tag{6.47}$$

Da jeder Summand nur von einer Variablen abhängt, muss jeder für sich konstant sein, denn die Summe darf ihren Wert nicht ändern, wenn nur eine der vier unabhängigen Variablen variiert wird. Diese Erkenntnis liefert vier formal gleiche, gewöhnliche Differentialgleichungen,

$$\frac{X''}{X} = K_x, \qquad \frac{Y''}{Y} = K_y, \qquad \frac{Z''}{Z} = K_z, \qquad \frac{T''}{T} = K_t, \tag{6.48}$$

wobei die Nebenbedingung

$$K_x + K_y + K_z - \mu_0\varepsilon_0 K_t = 0 \tag{6.49}$$

berücksichtigt werden muss. Die vier Gleichungen (6.48) sind formal identische Differentialgleichungen. Daher genügt es offenbar, nur eine von ihnen zu lösen. Wir nehmen etwa die dritte und schreiben sie in der bekannten Form,

$$Z''(z) - K_z Z(z) = 0. \tag{6.50}$$

Die Lösung dieser homogenen, harmonischen Differentialgleichung lautet

$$Z(z) = A_z \cos k_z z + B_z \sin k_z z \qquad \text{mit } k_z := \pm\sqrt{-K_z}. \tag{6.51}$$

Es ergibt sich offenbar nur dann eine reelle Lösung, wenn die Konstante K_z *nicht* positiv ist. Der gleichen Einschränkung sind auch die übrigen Konstanten K_x, K_y und K_t unterworfen, was die Nebenbedingung (6.49) grundsätzlich zulässt.

15 Auch *Produktansatz* genannt.

16 Man beachte, dass der Separationsansatz an ein (in unserem Falle kartesisches) *Koordinatensystem* gebunden ist.

Aus mathematischer Sicht ist diese Einschränkung nicht nötig. Es genügt vielmehr, nur die Reellwertigkeit der Funktion f zu verlangen. Dies bedeutet, dass zunächst eine komplexe Lösung $\tilde{f}$ gesucht werden kann, deren Realteil, $\Re\tilde{f}$, und Imaginärteil, $\Im\tilde{f}$, je separat der *reellen* Wellengleichung genügen. Bei der Suche nach $\tilde{f}$ kann man natürlich zulassen, dass die einzelnen Faktoren X, Y, Z und T (und auch die Konstanten $A_x \ldots$) komplexwertig sind.

Somit schreiben wir (6.51) in komplexer Form mit Exponentialfunktionen:

$$\tilde{Z}(z) = C_z^+ e^{jk_z z} + C_z^- e^{-jk_z z} \quad \text{mit } \mathrm{C}_z^\pm = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}_z \mp \mathrm{jB}_z). \tag{6.52}$$

Bildet man nun das Produkt (6.45), ergibt sich eine Summe, wobei alle Terme die gleiche Form haben. Einer dieser Terme lautet etwa

$$Ce^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = Ce^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}. \tag{6.53}$$

Dabei haben wir das Produkt der Konstanten $C_x^- C_y^- C_z^- C_t^+$ zu einer einzigen Konstanten C zusammengefasst, bei k_x, k_y und k_z nur das negative Vorzeichen mitgenommen und zur Beschreibung der Zeitabhängigkeit die neue Konstante (die so genannte *Kreisfrequenz*)

$$\omega := \pm\sqrt{-K_t} \tag{6.54}$$

eingeführt. Die Festlegung eines einzigen Vorzeichens bei ω und den k_x-, k_y- und k_z-Termen bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn k_x, k_y, k_z und ω sind im Allgemeinen komplexe Zahlen mit beliebigem Vorzeichen. Die getroffene Wahl der Vorzeichen wird später die Diskussion der Lösung erleichtern. Ganz rechts in (6.53) haben wir die Konstanten k_x, k_y und k_z zum so genannten *Wellenvektor* $\vec{k}$ und die kartesischen Koordinaten x, y und z zum Ortsvektor $\vec{r}$ zusammengefasst und können damit die Ortsabhängigkeit in einem einzigen Term schreiben. Im Folgenden soll nur noch ein einziger Term der Form (6.53) betrachtet werden, obwohl die vollständige allgemeine Lösung eine Superposition von unendlich vielen Termen der gleichen Form ist und nur die Zahlen k_x, k_y, k_z und ω verschieden sind.

Eine Lösung f der homogenen Wellengleichung hat die Form[17]

$$f(\vec{r}, t) = \Re\Big(Ce^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\Big), \tag{6.55}$$

wobei C, $\vec{k}$ und ω komplexwertig sein dürfen. Die Größen $\vec{k}$ und ω sind wegen (6.49) durch die Nebenbedingung

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 =: k_0^2 \tag{6.56}$$

miteinander verknüpft.

Zur Diskussion der Lösung (6.55) nehmen wir an, alle Komponenten von $\vec{k}$ sowie ω und C seien reell und positiv. Dann weist $\vec{k}$ in eine eindeutige Richtung, und wir können das Koordinatensystem so drehen, dass $\vec{k} = k_0 \vec{e}_z$ in die z-Richtung weist. Es ist dann

$$f(\vec{r}, t) = \Re\Big(Ce^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\Big) = \Re\Big(Ce^{j(\omega t - k_0 z)}\Big) = C\cos(\omega t - k_0 z) \tag{6.57}$$

17 Wir könnten ebenso gut den Imaginärteil nehmen, was bei allgemein komplexwertigem C aber nichts Neues bringt.

nur noch von z und t abhängig. Dies ist eine cos-Welle, die sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k_0} \tag{6.58}$$

in positiver z-Richtung bewegt. Somit gibt die Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle an und dessen Betrag bestimmt zusammen mit ω die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Diese Interpretation legitimiert die Wahl der Vorzeichen in (6.53). Wegen (6.56) gilt

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c = \text{Lichtgeschwindigkeit.} \tag{6.59}$$

Dies bedeutet, dass sich alle Lösungen der Form (6.55) im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit c ausbreiten. Weil die Lösung (6.57) sich nur in einer Richtung ändert, heißt sie (skalare) *Ebene Welle*.

6.4.4 Die Herleitung von Maxwell-Lösungen aus den Lösungen der skalaren Wellengleichung

Die im vorigen Unterabschnitt allgemein gelöste, skalare Wellengleichung (6.44) wurde aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet. Wir hatten gezeigt, dass jede kartesische Komponente von $\vec{E}$ und auch von $\vec{H}$ einer formal identischen Gleichung unterworfen ist, der Wellengleichung. Es wäre nun aber voreilig, anzunehmen, dass damit auch die Maxwell-Gleichungen insgesamt gelöst seien, etwa, indem für jede Feldkomponente ein Term der Form (6.55) angesetzt wird. Wegen der Maxwell-Gleichungen sind die einzelnen Komponenten voneinander abhängig, und diese Abhängigkeiten wollen wir jetzt studieren.

Zwar ist z.B. eine Lösung der Wellengleichung für E_x automatisch auch Teil einer Lösung der Maxwell-Gleichungen. Aber es ist keine *vollständige* Lösung, weil die übrigen Komponenten von $\vec{E}$ und alle Komponenten von $\vec{H}$ fehlen. Um zu einer „Maxwell-Lösung" zu gelangen, muss die zuerst durchgeführte Entkopplung wieder rückgängig gemacht werden, was wir jetzt mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen (6.38) machen wollen. Ausgehend von (6.55) beginnen wir etwa mit dem Ansatz

$$E_x(\vec{r}, t) = \Re\left(E_{x0} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right). \tag{6.60}$$

Wenn wir dies in die Maxwell-Gleichungen einsetzen, ist zu beachten, dass Realteilbildung und Differentiation nach $\vec{r}$ und t vertauscht werden können. Als Erstes kann wegen der ersten Maxwell-Gleichung [$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$][18] sofort geschlossen werden, dass H_y und H_z beide den gleichen Faktor $e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ mit dem gleichen Wellenvektor $\vec{k}$ und der gleichen Kreisfrequenz ω enthalten müssen. Mit der zweiten Maxwell-Gleichung [$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$] folgt dann unmittelbar, dass *alle* Komponenten von $\vec{E}$ und in der Folge auch *alle* Komponenten von $\vec{H}$ den gleichen Faktor enthalten. Es sei betont: Die Komponenten könnten noch weitere Terme enthalten. Im Sinne größtmöglicher Einfachheit probieren wir den Ansatz

$$\vec{E} = \Re\left(\vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right), \qquad \vec{H} = \Re\left(\vec{H}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right). \tag{6.61}$$

18 Man beachte die Koordinatendarstellung (5.29) der Rotation.

Die vektoriellen, komplexen Amplituden $\vec{E}_0$ und $\vec{H}_0$ sind mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen noch zu bestimmen.

Da die Orts- und Zeitabhängigkeit im Ansatz (6.61) nur im Exponentialterm ist, können sämtliche in den Maxwell-Gleichungen vorkommenden Differentiationen ausgeführt werden.

Mit den Koordinatendarstellungen (5.29) und (5.30) ergeben sich die einfachen Beziehungen

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -j\vec{k}\times\vec{E}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = -j\vec{k}\times\vec{H}, \tag{6.62-1}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = -j\vec{k}\cdot\vec{E}, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = -j\vec{k}\cdot\vec{H}, \tag{6.62-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = j\omega\vec{E}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = j\omega\vec{H}, \tag{6.62-3}$$

wobei wir die Realteilzeichen auf beiden Seiten weggelassen haben. Dies bedeutet, dass sich für unsere speziellen Lösungen (6.61) – und nur für diese – die Maxwell-Gleichungen als einfache *algebraische* Gleichungen präsentieren:

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\mu_0\vec{H}_0, \tag{6.63-1}$$

$$\vec{k}\times\vec{H}_0 = -\omega\varepsilon_0\vec{E}_0, \tag{6.63-2}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0, \tag{6.63-3}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{H}_0 = 0. \tag{6.63-4}$$

Der gemeinsame Faktor $-je^{j(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ wurde gekürzt. Somit sind in diesen vereinfachten Maxwell-Gleichungen nur noch die im Allgemeinen komplexen Amplituden $\vec{E}_0$ und $\vec{H}_0$, der Wellenvektor $\vec{k}$, die Kreisfrequenz ω und die Materialparameter enthalten. Offenbar gibt es, wenn $\vec{k}$ reell ist, Lösungen der Form (6.61) mit reellen Feldamplituden. Weil die Diskussion mit komplexen Vektoren wenig anschaulich ist,[19] wollen wir nur eine reelle Lösung diskutieren.

Aus der geometrischen Interpretation von Kreuz- und Skalarprodukt folgt, dass $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ und $\vec{k}$ senkrecht aufeinander stehen und dass die Beträge $|\vec{E}_0|$ und $|\vec{H}_0|$ zueinander proportional sind: Aus (6.28-1) und (6.28-2) folgt nämlich

$$\begin{aligned} |\vec{k}|\cdot|\vec{E}_0| &= \omega\mu_0|\vec{H}_0|,\\ |\vec{k}|\cdot|\vec{H}_0| &= \omega\varepsilon_0|\vec{E}_0| \end{aligned} \tag{6.64}$$

und daraus

$$\frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{H}_0|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} =: Z_{\mathrm{w}0}, \tag{6.65}$$

wobei $Z_{\mathrm{w}0}$ *Wellenwiderstand* des Vakuums oder auch *Wellenimpedanz* des Vakuums genannt wird. Weiter folgt aus (6.64) nochmals die Bedingung

$$(6.56) \qquad |\vec{k}|^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_0^2. \tag{6.66}$$

In unserem Spezialfall liefern die Gleichungen (6.63–3) und (6.63–4) nichts Neues, stehen aber auch nicht im Gegensatz zu den ersten zwei Gleichungen. Dies bestätigt

19 Die Richtung eines komplexen Vektors $\vec{u}$ ist unklar, wenn $\Re\vec{u}$ und $\Im\vec{u}$ in verschiedene Richtungen weisen.

frühere Bemerkungen, wonach im quellenfreien Fall die Maxwell'schen Divergenzrelationen nur in der Statik zusätzliche Informationen liefern (vgl. Unterabschnitt 6.1.2).

Man beachte, dass in unserem Fall wegen $\Re\left(e^{j(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right)=\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})$ die gemachten Aussagen nicht nur für die Feldamplituden, sondern auch für die orts- und zeitabhängigen Feldwerte gelten.

Das elektromagnetische Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\Re\left(\vec{E}_0 e^{j(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right),\qquad \vec{H}(\vec{r},t)=\Re\left(\vec{H}_0 e^{j(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right)$$

mit den Bedingungen

$$\vec{H}_0=\frac{1}{\omega\mu_0}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right),\qquad \vec{E}_0\cdot\vec{k}=0,\qquad \vec{k}\cdot\vec{k}=\omega^2\mu_0\varepsilon_0=k_0^2$$

genügt im Vakuum den Maxwell-Gleichungen und heißt *(linear polarisierte, harmonische) Ebene Welle*. Eine Ebene Welle ist somit (bei gegebener Kreisfrequenz ω) durch die Angabe der Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ – er beschreibt die Ausbreitungsrichtung der Ebenen Welle – und der senkrecht auf $\vec{k}$ stehenden (vektoriellen!) Amplitude $\vec{E}_0$ von $\vec{E}$ eindeutig gegeben. Die Komponenten von $\vec{k}$ werden Wellenzahlen in x-, y- und z-Richtung genannt, während die Zahl $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ Wellenzahl des Vakuums heißt.

Die Diskussion des Gleichungssystems (6.63) wird etwas aufwändiger, wenn $\vec{k}$ komplex ist und die Richtungen von $\Re\vec{k}$ und $\Im\vec{k}$ *nicht* übereinstimmen. Wir verzichten auf weitergehende Ausführungen und merken nur an, dass die Ebene Welle in diesem Fall *evaneszent* heißt.

Zum Schluss noch eine Bemerkung zur Vollständigkeit der gefundenen Lösungen: Die Ebene Welle (6.61) ist eine speziell ausgewählte Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen, welche a) durch die Wahl des kartesischen Koordinatensystems und b) durch die Wahl des Verfahrens mit Produktansatz zustande kam. Sie hat mehrere Freiheitsgrade, nämlich die Richtungen von $\vec{k}$ und $\vec{E}_0$ sowie den Betrag von $\vec{E}_0$ und die Kreisfrequenz ω. Ohne Beweis sei der Satz zitiert, wonach jedes elektromagnetische Feld, welches im endlichen Volumen V den homogenen (= quellenfreien) Maxwell-Gleichungen genügt, in V durch eine geeignete Überlagerung von Ebenen Wellen dargestellt werden kann. Mit einem Ansatz von hinreichend vielen, in unterschiedliche Richtungen laufenden und unterschiedlich polarisierten[20] Ebenen Wellen kann somit immer eine Näherung für das elektromagnetische Feld im Volumen V gefunden werden.

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen (= quellenfreien) Maxwell-Gleichungen im homogenen (= mit einem einzigen Material gefüllten) Raum formal erledigt. Im nächsten Unterabschnitt wollen wir uns mit dem Einfluss der Quellen befassen.

6.4.5 Die inhomogene Wellengleichung

Zu Beginn des Unterabschnitts 6.4.2 haben wir die Feldquellen, d.h. die Stromdichte $\vec{J}$ und die Ladungsdichte ϱ, explizit null gesetzt und uns damit auf den quellenfreien Fall

20 Unter der Polarisationsrichtung einer Ebenen Welle versteht man die Richtung von $\vec{E}_0$, die immer senkrecht auf $\vec{k}$ steht.

beschränkt. Es gibt nun zwei grundsätzlich verschiedene Fälle, wo diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft:

- Im leitfähigen Medium, wo etwa das Ohm'sche Gesetz, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, gilt. Hier ist jedes elektrische Feld $\vec{E}$ immer auch von einem Strömungsfeld $\vec{J}$ begleitet. Man kann in diesem Fall in der zweiten Maxwell-Gleichung, (6.11–2), die Stromdichte $\vec{J}$ mit dem Ohm'schen Gesetz eliminieren und erhält, wenn auch noch die Materialgleichung $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ gilt, die – im Vergleich mit der zweiten Zeile von (6.38) – kompliziertere Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{6.67}$$

  Die Herleitung einer modifizierten Wellengleichung ist dann in ähnlicher Weise möglich, wie dies bereits in Unterabschnitt 6.4.2 gezeigt wurde. Der einzige Unterschied ist der, dass neben der zweiten zeitlichen Ableitung zusätzlich ein Term mit der ersten zeitlichen Ableitung erscheint. Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen und verweisen auf später (vgl. Unterabschnitt 7.1.4), wo wir diesen Fall (bei harmonischer Zeitabhängigkeit) besonders elegant erledigen können.

- Wenn die Stromdichte $\vec{J} = \vec{J}_0$ und die Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0$ explizite vorgegeben sind. Dies ist insbesondere bei Aufgabenstellungen, welche die Feld*erzeugung* betreffen, der Fall. Es geht dann nicht darum, diese so genannt *eingeprägten* Quellen zu berechnen – sie sind ja vorgegeben –, sondern darum, ihren Einfluss auf die Felder in ihrer Umgebung zu bestimmen.

Wir wollen uns in diesem Unterabschnitt nur mit dem zweiten Fall beschäftigen und schreiben zu diesem Zweck die Maxwell-Gleichungen noch einmal auf. Dabei beschränken wir uns auf linear, homogen isotropes Material. Wir nehmen also an, $\vec{J}_0$ und ϱ_0 seien in einem Medium eingeprägt, welches den ganzen Raum ausfüllt und im Übrigen mit den Materialkonstanten μ und ε beschrieben werden kann ($\sigma = 0$!).[21] Dann gilt statt (6.38)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = 0 \\
\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J}_0 + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\left(\vec{J}_0 + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \\
\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\varrho_0}{\varepsilon} \\
\operatorname{div} \vec{H} &= 0
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Nach „Multiplikation“ der dritten Zeile mit $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ und Subtraktion von der zweiten folgt sofort die Ladungserhaltung

$$\operatorname{div} \vec{J}_0 = -\frac{\partial \varrho_0}{\partial t}. \tag{6.69}$$

Somit dürfen Ladungs- und Stromdichte *nicht* unabhängig voneinander vorgegeben werden, sondern ϱ_0 ist – bis auf eine statische Ladungsdichte – bereits durch die Vorgabe von $\vec{J}_0$ festgelegt.

21 Diese Vorgabe ist physikalisch beinahe widersprüchlich: Wie sollen Ströme fließen, wenn keine Leitfähigkeit vorhanden ist? Gemeint ist, dass am Ort der vorgegebenen Quellen – und nur dort – die Materialgleichungen *nicht* gelten, dass aber trotzdem die Felder genau so sind, wie wenn homogenes Material vorhanden wäre. In diesem Sinne handelt es sich um ein abstraktes Modell, das nicht allen physikalischen Realitäten gerecht wird, im Hinblick auf die gesuchten Feldgrößen außerhalb der Quellen jedoch exakt ist.

Zur Herleitung einer Wellengleichung für $\vec{E}$ gehen wir gleich vor wie früher und wenden auf die erste Gleichung in (6.68) den Operator rot, auf die zweite den Operator $-\mu\frac{\partial}{\partial t}$ an und finden

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad -\mu\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{J}_0}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{6.70}$$

Damit kann $\vec{H}$ eliminiert werden. Weil die Divergenz von $\vec{E}$ hier nicht verschwindet, aber immerhin durch die dritte Gleichung in (6.68) gegeben ist, können wir wiederum den Laplace-Operator $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ einführen und erhalten schließlich:

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{J}_0}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varrho_0. \tag{6.71}$$

Links erscheint wieder der bekannte Wellenoperator, der hier auf den Vektor $\vec{E}$ wirkt, während rechts nicht null, sondern ein komplizierterer, aber *bekannter* und von $\vec{E}$ unabhängiger Ausdruck steht. Es handelt sich somit um eine *inhomogene* Wellengleichung für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, und die Inhomogenität der Gleichung enthält die vorgegebenen Strom- und Ladungsdichten.

Um auch für $\vec{H}$ eine Gleichung zu finden, „multiplizieren" wir die erste Gleichung von (6.68) mit $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ und wenden auf die zweite die Rotation an. Es folgt nach einer geeigneten Vertauschung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{J}_0 + \varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad \varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \tag{6.72}$$

Damit kann nun $\vec{E}$ eliminiert werden. Weil $\operatorname{div}\vec{H}$ verschwindet, ergibt sich hier sogar noch etwas einfacher die mit (6.71) eng verwandte Gleichung

$$\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\vec{J}_0, \tag{6.73}$$

wo rechts wiederum eine berechenbare Funktion steht, welche die unbekannte Funktion $\vec{H}$ nicht enthält.

6.4.6 Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Die Differentialgleichungen für $\vec{E}$, (6.71), und $\vec{H}$, (6.73), sehen formal gleich aus. Da es sich um inhomogene, lineare Gleichungen handelt, setzt sich die vollständige Lösung aus zwei Anteilen zusammen, einer

- allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, die bereits in den Unterabschnitten 6.4.3 und 6.4.4 behandelt wurde, sowie einer
- partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

In diesem Unterabschnitt befassen wir uns mit der partikulären Lösung. In einem ersten Schritt kann die vektorielle Gleichung ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch Aufspaltung in ihre *kartesischen* Komponenten in eine skalare Gleichung verwandelt werden:

$$\left(\Delta - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f = g, \tag{6.74}$$

wobei f für eine kartesische Komponente von $\vec{E}$ bzw. $\vec{H}$ steht und g die entsprechende *bekannte* Komponente auf der rechten Seite von (6.71) bzw. (6.73) bedeutet.

Selbst die skalare Gleichung (6.74) ist noch zu kompliziert, um ihr die Lösung direkt anzusehen, denn die Funktion g auf der rechten Seite kann beliebig kompliziert sein. Die Idee zur Lösung ist von der physikalischen Interpretation motiviert: Weil g als Ursache (Quelle) der Funktion f aufgefasst wird, kann man die Ursache in kleine („punktförmige") Teilquellen zerlegen und zuerst den Einfluss jeder Punktquelle separat studieren. Kennt man den Einfluss einer einzigen Punktquelle, kann hinterher der Einfluss der beliebigen Quellenverteilung g als Superposition der Einflüsse von geeignet verteilten Punktquellen erhalten werden. Anstelle von (6.74) wird also zuerst die Gleichung

$$\left(\Delta - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, \vec{r}\,', t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')g(\vec{r}\,', t) \tag{6.75}$$

mit der speziellen Inhomogenität $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')g(\vec{r}\,', t)$ und der zugehörigen speziellen Lösung $G(\vec{r}, \vec{r}\,', t)$ betrachtet. Dabei ist $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ die *Dirac'sche Deltadistribution*, welche als Grenzfall einer Funktion von $\vec{r}$ definiert werden kann, die innerhalb einer kleinen Kugel K (Radius $R_0(\to 0)$, Volumen $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$) mit Mittelpunkt $\vec{r}\,'$ den Wert $1/V_0(\to \infty)$ hat und außerhalb von K verschwindet, d.h. δ ist null, wenn der *Betrag* des Arguments größer ist als $R_0(\to 0)$. Die noch zu findende Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,', t)$ beschreibt den Einfluss der am Ort $\vec{r}\,'$ befindlichen Punktquelle im ganzen Raum, d.h. für alle Punkte $\vec{r}$.

Wenn wir die so genannte *Green'sche Funktion G* gefunden haben, können wir die Lösung f als Superposition (Integral) von Green'schen Funktionen darstellen:

$$f(\vec{r}, t) = \iiint\limits_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}\,', t)\, dV', \tag{6.76}$$

wobei die Volumenintegration über den ganzen Raum V′ erstreckt werden muss. Raumteile mit verschwindenden Quellen ($g(\vec{r}\,', t) = 0$) können natürlich weggelassen werden, weil die zugehörige Green'sche Funktion ebenfalls verschwindet: Die triviale Funktion $G = 0$ erfüllt in diesem Fall (6.75).

Somit geht es nur noch darum, die Lösung der speziellen Gleichung (6.75) zu finden. Dies ist kein einfaches Unterfangen! Wir wollen zuerst die räumlichen Eigenschaften angeben, welche die gesuchte Funktion G haben muss, und dabei die physikalische Interpretation im Auge behalten.

- G soll eine möglichst einfache Form haben, ist somit *kugelsymmetrisch* bezüglich des Quellpunkts $\vec{r}\,'$.
- Die Werte von G sind mit zunehmender Distanz von der Quelle abnehmend, denn die punktförmige Quelle hat vor allem in ihrer unmittelbaren Umgebung eine Wirkung.

Die erste Eigenschaft besagt, dass G in der Form

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,', t) = G(R, t) \qquad R := |\vec{r} - \vec{r}\,'| \tag{6.77}$$

dargestellt werden kann. Führen wir ein spezielles, für jedes $\vec{r}\,'$ unterschiedliches Kugelkoordinatensystem um den Punkt $\vec{r}\,'$ mit den Koordinaten R, θ und ϕ ein, kann der Laplace-Operator mit (6.34) vereinfacht werden, weil wegen der Symmetrie von G alle Ableitungen nach θ und nach ϕ wegfallen. Man erhält statt (6.75)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{2}{R}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(R,t)={}^3\delta(R)\tilde{g}(t), \tag{6.78}$$

wobei[22] die Funktion $\tilde{g}(t)$ nur noch die Zeitvariation bei $\vec{r}\,'$ (d.h. im Nullpunkt des neuen Koordinatensystems) beschreibt. Natürlich gilt $\tilde{g}(t)=g(\vec{r}\,',t)$. (6.78) ist eine partielle Differentialgleichung mit nur noch zwei unabhängigen Variablen, R und t. Solange $R\neq 0$ ist, verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, und der Ansatz von d'Alembert:

$$G(R,t)=\frac{h(t\pm\sqrt{\mu\varepsilon}R)}{R}\qquad R>R_0\to 0 \tag{6.79}$$

mit der beliebigen (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion h führt zum Ziel, was für $R\neq 0$ durch Einsetzen in (6.78) leicht bestätigt werden kann (vgl. Übungsaufgabe 6.4.7.3).

Im Punkt $R=0$ ist der Ansatz (6.79) singulär und kann daher *nicht* in (6.78) eingesetzt werden. Indem wir den zur Deltadistribution gehörigen Grenzübergang ($R_0\to 0$) noch nicht durchführen, d.h. vorerst mit einem endlichen Radius R_0 rechnen, und die Differentialgleichung (6.78) über das Volumen V_0 integrieren, können wir die unbekannte Funktion h bestimmen. Der Verlauf von G ist im Innern der Kugel K nicht bekannt. Wir können jedoch einige plausible Annahmen treffen:

- G sei auch im Innern von K kugelsymmetrisch und glatt.
- G sei auf der Kugeloberfläche stetig.
- G übertrifft im Innern von K den Wert auf der Kugeloberfläche nicht zu stark. Gemeint ist, dass das Integral $\iiint_{\mathrm{K}} G\,dV$ bei kleiner werdender Kugel endlich bleibt, wenn der Wert auf der Kugeloberfläche $G(R_0,t)$ dem Ansatz (6.79) entnommen wird.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\mathrm{K}}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{2}{R}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(R,t)\,dV=\\&4\pi\int\limits_0^{R_0}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial G}{\partial R}\right)R^2\,dR-4\pi\mu\varepsilon\int\limits_0^{R_0}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}R^2\,dR.\end{aligned} \tag{6.80}$$

Das erste Integral nach dem Gleichheitszeichen kann ausgeführt werden: Mit

$$\frac{\partial^2 G}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial G}{\partial R}\equiv\frac{1}{R^2}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right) \tag{6.81}$$

folgt nämlich

$$4\pi\int\limits_0^{R_0}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial G}{\partial R}\right)R^2\,dR=4\pi\int\limits_0^{R_0}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right)dR=4\pi R_0^2\left.\frac{\partial G}{\partial R}\right|_{R=R_0}, \tag{6.82}$$

22 Das Symbol ${}^3\delta$ bezeichnet die Dirac'sche Deltafunktion in einem räumlichen Sinn, d.h. das Volumenintegral $=\iiint_{\mathrm{V}}{}^3\delta(R)\,dV$ hat nach Definition den Wert eins, wenn $R=0$ in V liegt. Obwohl ${}^3\delta$ anschaulich identisch ist mit δ in Gleichung (6.75), modifizieren wir das Symbol, denn das Argument ist im einen Fall ein Vektor, im anderen ein Skalar.

wobei der Anteil an der unteren Grenze deshalb weggelassen werden kann, weil $\frac{\partial G}{\partial R}$ an der Stelle $R = 0$ aus Symmetriegründen verschwindet.

Das zweite Integral in (6.80) fällt weg, wenn der Grenzübergang $R_0 \to 0$ durchgeführt wird, weil G (und damit auch seine zeitlichen Ableitungen, denn das Zeitverhalten ist durch $\tilde{g}(t)$ in der *ganzen* Kugel gegeben) nur wie $\frac{1}{R_0}$ anwächst. Jetzt kann der Ansatz (6.79) in den Ausdruck ganz rechts in (6.82) eingesetzt werden und man erhält, wenn wir auch die (triviale) Integration der rechten Seite von (6.78) durchführen:

$$\begin{aligned}
&4\pi \lim_{R_0\to 0} R_0^2 \left.\frac{h(t \pm \sqrt{\mu\varepsilon}R)}{R}\right|_{R=R_0} \\
&= 4\pi \lim_{R_0\to 0/} \left(\pm/\sqrt{\mu\varepsilon}R_0 h'(t \pm \sqrt{\mu\varepsilon}R_0) - h(t \pm \sqrt{\mu\varepsilon}R_0)\right) \\
&\qquad\qquad = -4(t) = \tilde{g}(t) \underbrace{\iiint\limits_{\mathrm{K}} {}^3\delta(R)\, dV}_{=1}, \qquad (6.83)
\end{aligned}$$

und daher

$$h = -\frac{\tilde{g}}{4\pi}. \qquad (6.84)$$

Die gesuchte Funktion G lautet somit, wenn wir die Substitutionen $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ und $\tilde{g}(t) = g(\vec{r}\,', t)$ wieder rückgängig machen:

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,', t) = -\frac{g(\vec{r}\,', t \pm \sqrt{\mu\varepsilon}|\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \qquad (6.85)$$

Das Pluszeichen im zweiten Argument von g kann als unphysikalisch weggelassen werden, weil die Ursache $g(\vec{r}\,', t)$ zu keinem Zeitpunkt $t_- < t$ eine durch G beschriebene Wirkung haben kann. (Dieses Kausalitätspostulat muss streng genommen als zusätzliche Annahme gesehen werden. Weitergehende Ausführungen dazu findet man auch in Anhang E.)

Damit kann eine physikalisch interessante partikuläre Lösung der Wellengleichung (6.74) gemäß (6.76) folgendermaßen geschrieben werden:

$$f(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathrm{V}'} \frac{g(\vec{r}\,', t - \sqrt{\mu\varepsilon}|\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV'. \qquad (6.86)$$

Die Vervollständigung zur vektoriellen Lösung einer Gleichung vom Typ (6.71) bzw. (6.73) ist kein Problem: Man erhält etwa