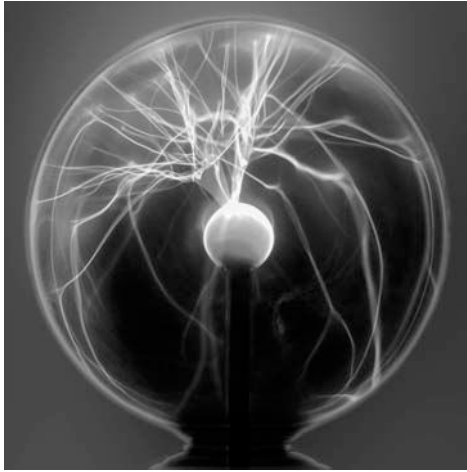


Randy Harris

Moderne Physik



Randy Harris

Moderne Physik

2., aktualisierte Auflage

PEARSON

Higher Education

München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney

a part of Pearson plc worldwide

Der Prozess geht so lange weiter, bis der Computer ψ in allen Punkten mit Abstand Δx entlang der gesamten x -Achse kennt.

Woher stammen aber die ersten beiden Werte von ψ , und warum brauchen wir überhaupt *zwei*? Wir benötigen zwei Werte, weil die Schrödinger-Gleichung eine Differenzialgleichung *zweiter* Ordnung ist, die also eine zweite Ableitung enthält. Die Gleichung ersten Grades $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -bf(x)$ beispielsweise hat die Lösung $f(x) = Ae^{-bx}$ mit der beliebigen Konstante A , die im Wesentlichen eine Integrationskonstante ist. Lösungen für Gleichungen zweiten Grades haben, abgesehen davon, dass sie schwerer zu bestimmen sind, zwei beliebige Konstanten. Diese Konstanten können auf zweierlei Art bestimmt werden, die beide keineswegs gleichwertig erscheinen – sie legen aber beide die Lösungen für den ganzen Raum fest. Bei einer „analytischen“ Herleitung der Lösung einer Differenzialgleichung (siehe „Näher betrachtet: Die Lösung für den endlich tiefen Topf“ von Seite 240) treten sie meist als konstante Faktoren vor den beiden unabhängigen Funktionen auf. In unserer „numerischen“ Lösung verwenden wir die Lösungen eines Anfangswerts sowie eines nahe benachbarten Werts. Im Grunde genommen legen wir mit diesen beiden Werten auch die „Höhe“ der Lösung am Anfangspunkt sowie ihren Verlauf – ihre Änderung oder Nicht-Änderung – in diesem Punkt fest. Von dort aus zeichnet die numerische Lösung lediglich $\psi(x)$ gemäß der von der Schrödinger-Gleichung vorgegebenen Krümmung nach. Mit einer im Wesentlichen gleichartigen Methode können wir $\psi(x)$ vom Anfangspunkt aus auch in negativer Richtung zeichnen. Die dadurch entstehende Funktion $\psi(x)$ ist automatisch so glatt, wie bei es bei der Punkt-zu-Punkt-Methode überhaupt möglich ist. Daher ist die einzige verbleibende Bedingung, über die wir uns Gedanken machen müssen, die Normierbarkeit. Die Funktion darf nicht divergieren, und dies ist auch der Schlüssel für die Anwendung der Prozedur und das Ermitteln der Antworten.

Sind $U(x)$ und m gegeben, wählen wir ein Δx , das so klein ist, dass sich $\psi(x)$ zwischen zwei Punkten nur wenig ändern sollte; Δx beträgt daher nur einen Bruchteil dessen, was wir als typische Wellenlänge vermuten dürfen. Dann wählen wir zur Überprüfung eine Energie E . In beinahe allen Fällen stellen wir fest, dass die Punkt-zu-Punkt-Lösung bei irgendeiner anfänglichen Funktion $\psi(x)$ divergiert, sobald x gegen $+\infty$, $-\infty$ oder beides geht – ganz egal, wie wir den Verlauf am Anfangspunkt wählen, ob dort $\psi(x + \Delta x)$ größer, kleiner oder gleich $\psi(x)$ ist. Wir *können* allerdings den anfänglichen Verlauf gerade so wählen, dass $\psi(x)$ an einem Ende zwanglos gegen null geht, was allerdings auf Kosten der beliebigen Form des Kurvenverlaufs von $\psi(x)$ geht. Außerdem divergiert $\psi(x)$ am anderen Ende immer noch. Wir schließen daraus, dass E falsch ist, und wählen eine andere Energie. Nur bei ganz bestimmten Werten von E stellen wir für *beliebige* $\psi(x)$ am Anfangspunkt fest (ausgenommen dieser Anfangspunkt ist zufällig ein Schwingungsknoten), dass wir den Verlauf so wählen können, dass $\psi(x)$ an einem Ende auf null abklingt und *dies automatisch auch am anderen Ende tut*. Dies ist bei den erlaubten quantisierten Energien der Fall. Weil dies für beliebige Anfangswerte $\psi(x)$ am Anfangspunkt gilt, haben wir immer noch die Freiheit, diesen Wert zu wählen. Das verändert weder den Charakter noch die Form von $\psi(x)$, sondern lediglich ihre „vertikale“ Ausdehnung. Tatsächlich ermöglicht das uns einfach, die Funktion zu normieren. Ist einmal die richtige Energie gefunden, ermöglichen uns die beiden Konstanten, kurz gesagt, die Anpassung an die **Randbedingung**, dass $\psi(x)$ an beiden Enden gegen null geht. Dazu benötigen wir eine Konstante. Außerdem können wir die Funktion normieren, wofür wir die andere Konstante benötigen.

Es sieht so aus, als würde der Computeransatz ewig dauern, denn es gibt unendlich viele mögliche Energien und unendlich viele Kurvenverläufe, die ausprobiert werden müssen. Wie sich zeigt, verändert sich aber die Divergenz von $\psi(x)$ drastisch, sobald der versuchsweise gewählte Wert für E einen „realen“ Wert erreicht, sodass wir relativ schnell zu einem Ergebnis kommen. Darüber hinaus erleichtert ein symmetrischer Verlauf der Funktion der potenziellen Energie deutlich die Wahl des Verlaufs. Verschiedene Übungen wenden diese Methode am Ende des Kapitels auf den endlich tiefen Topf, den harmonischen Oszillator und andere Fälle an.

F 5.11 Wohldefinierte Observable: Eigenwerte

O
R
T
G
E
S
C
H
I
T
E
N

Bei einer wohldefinierten Observablen ist die Unbestimmtheit null. Ein Experiment, das dazu ausgelegt ist, diese Observable zu bestimmen, kann dann nur einen einzigen Wert messen. Es gibt ein mathematisches Hilfsmittel, mit dem wir feststellen können, ob eine Wellenfunktion einen Zustand beschreibt, für den eine gegebene Observable wohldefiniert ist. Bevor wir dies einführen, wollen wir jedoch überlegen, bei welchen Funktionen wir wohldefinierte Werte der grundlegenden Observablen erwarten.

Impuls: In Abschnitt 4.3 ist uns die grundlegende ebene Welle der Quantenmechanik, die komplexe Exponentialfunktion e^{ikx} , begegnet. Da es sich um eine sinusförmige Funktion handelt, die sich über den ganzen Raum erstreckt und nur eine einzige Wellenlänge besitzt, woraus eine unendliche Ortsunschärfe folgt, ist diese Funktion der Prototyp eines wohldefinierten Impulses.

Energie: In Abschnitt 5.2 haben wir behauptet, dass der Zeitanteil der Wellenfunktion $e^{-i\omega t}$ eine einzige Frequenz besitzt und daher eine wohldefinierte Energie aufweist.

Ort: Bei einer Wellenfunktion mit wohldefiniertem Ort gäbe es keine Wahrscheinlichkeit, das Teilchen anderswo zu finden als an einem einzigen Punkt. Bezeichnen wir diesen Punkt mit x_0 , dann wäre $\psi(x)$ überall null außer bei x_0 . Wir bezeichnen diese besondere Wellenfunktion mit dem speziellen Symbol $\psi_{x_0}(x)$. Sie ist in ► Abbildung 5.19 grob skizziert.

Nun folgt das mathematische Werkzeug:

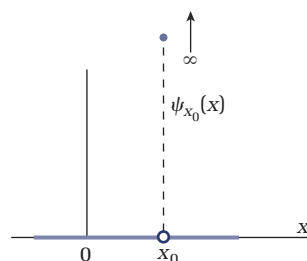


Abbildung 5.19: Eine Wellenfunktion mit wohldefiniertem Ort

Eigenfunktion

Definition: Ist ein Operator \hat{Q} gegeben, so ist die Funktion $f(x)$ dann und nur dann eine **Eigenfunktion** des Operators, wenn der auf die Funktion wirkende Operator auf die gleiche Funktion führt (multipliziert mit einer Konstanten):

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{Q} & f(x) & = & \lambda & f(x) \\ \text{Operator} & \text{Eigenfunktion} & & \text{Eigenwert} & \text{Eigenfunktion} \end{array}$$

Die Konstante λ wird als **Eigenwert** des Operators bezeichnet. Im Allgemeinen besitzt ein Operator mehrere Eigenwerte und dazugehörige Eigenfunktionen, welche die Bedingung erfüllen.

Der Nutzen dieses Werkzeugs in der Quantenmechanik ist folgender:

Eigenfunktion und Wohldefiniertheit

Eine **Wellenfunktion** ψ ist eine Funktion, für die eine Observable wohldefiniert ist, d. h., es gibt keine Unbestimmtheit im Ergebnis einer Messung von Q , dann und nur dann, wenn sie eine Eigenfunktion des Operators \hat{Q} darstellt. Der Eigenwert ist der wohldefinierte Wert dieser Observablen.

$$Q \text{ ist wohldefiniert} \Leftrightarrow \Delta Q = 0 \Leftrightarrow \hat{Q}\psi = \bar{Q}\psi$$

Beachten Sie, dass \bar{Q} an die Stelle des Eigenwerts tritt. Dies ist korrekt, denn \bar{Q} ist eine Konstante, und wenn es tatsächlich keine Unbestimmtheit beim Wert der Observablen gibt, sind der Mittelwert und einzelne Werte im Wesentlichen ein und dasselbe. Bevor wir diese Behauptung diskutieren, wollen wir überprüfen, ob dies unseren früheren Erwartungen entspricht.

Impuls: Gehört die Funktion e^{ikx} zu einem wohldefinierten Impuls ($\Delta p = 0$), sollte sie eine Eigenfunktion des Impulsoperators darstellen:

$$\hat{p}e^{ikx} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}.$$

Sie ist es tatsächlich, und der Eigenwert ist tatsächlich der wohldefinierte Impuls $p = \hbar k$. Andere Funktionen verhalten sich nicht auf diese Weise. Beispiel 5.6 nennt verschiedene solcher „Fehlschläge“.

Energie: Entsprechend sollte $e^{-i\omega t}$ eine Eigenfunktion des Energieoperators sein.

$$\hat{E}e^{-i\omega t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = \hbar \omega e^{-i\omega t}.$$

So erfahren wir auf dieselbe Weise wie oben, dass E ein wohldefiniertes $\hbar \omega$ ist.

Ort: Aufgrund der seltsamen Eigenschaften der in Abbildung 5.19 gezeigten Funktion ist dieser Nachweis nicht ganz einfach.⁸ Die Frage lautet immer noch:

$$x \psi_{x_0}(x) \stackrel{?}{=} x_0 \psi_{x_0}(x).$$

Weil die Funktion $\psi_{x_0}(x)$ überall null ist, mit Ausnahme von x_0 , sind beide Seiten der Gleichung in all diesen Punkten null. An dem einzigen weiteren Punkt $x = x_0$ ist die Variable x , multipliziert mit $\psi_{x_0}(x)$ auf der linken Seite (trivialerweise) x_0 , genau derselbe Wert wie auf der rechten Seite. Damit ist die Gleichung gültig, und sie ist auch die einzige, für die das gilt. Sie ist *die* Funktion, die einen wohldefinierten Ort beschreibt.

⁸ Vielleicht verlieren Sie bei dieser aalglaten Diskussion einer offensichtlich pathologischen Funktion den Mut. Bevor Mathematiker zufrieden sind, müssen die Dinge eben viel genauer definiert sein. Genaue Begründungen existieren jedoch. Es mag nicht immer sinnvoll sein, aber meist preschen die Physiker vor, ohne sich allzu sehr um solche Spitzfindigkeiten zu kümmern.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass $\hat{Q}\psi = \bar{Q}\psi \Rightarrow \Delta Q = 0$ gilt. Wir beginnen mit einer Berechnung von \bar{Q}^2 und nehmen an, dass $\hat{Q}\psi = \bar{Q}\psi$ gilt.

$$\begin{aligned}\bar{Q}^2 &= \int_{\text{gesamter Raum}} \psi^* \hat{Q}^2 \psi \, dx = \int_{\text{gesamter Raum}} \psi^* \hat{Q}(\hat{Q}\psi) \, dx \\ &= \int_{\text{gesamter Raum}} \psi^* \hat{Q}(\bar{Q}\psi) \, dx = \bar{Q} \int_{\text{gesamter Raum}} \psi^* \hat{Q}\psi \, dx = \bar{Q}^2.\end{aligned}$$

Daher ist $\Delta Q = \sqrt{\bar{Q}^2 - \bar{Q}^2} = 0$. Ein allgemeiner Beweis der Umkehrung – also $\Delta Q = 0 \Rightarrow \hat{Q}\psi = \bar{Q}\psi$ – benötigt zu viel Mathematik, um ihn hier vorzustellen. Er kann aber ziemlich einfach für den Impulsoperator nachgeprüft werden. Das überlassen wir Ihnen als Übung.

Beispiel 5.6 Wohldefinierter Impuls

Welche der folgenden Wellenfunktionen hat einen wohldefinierten Impuls? Bestimmen Sie den Eigenwert bei den Funktionen, bei denen dies gilt. (a) $Ae^{-(x/2\varepsilon)^2}$, (b) $A \cos k_0 x$, (c) $A [\cos(k_0 x) - i \sin(k_0 x)]$, (d) $A [\cos(k_0 x) - \sin(k_0 x)]$

Lösung

$$(a) \hat{p} \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A e^{-(x/2\varepsilon)^2} = (-i\hbar) A e^{-(x/2\varepsilon)^2} \left(\frac{-x}{2\varepsilon^2} \right)$$

Hierbei handelt es sich nicht um eine Konstante, die mit $Ae^{-(x/2\varepsilon)^2}$ multipliziert wird, daher ist der mit dieser Wellenfunktion verknüpfte Impuls nicht wohldefiniert. Natürlich erwarten wir auch nicht, dass das Δp dieser Gaußförmigen „Ausbeulung“ tatsächlich null wäre, zumal Δx nicht unendlich ist.

$$(b) -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A \cos k_0 x = i\hbar k_0 A \sin k_0 x$$

Auch hier ist der Impuls nicht wohldefiniert, da mit $A \cos k_0 x$ keine Konstante multipliziert wird. Es ist merkwürdig, dass eine unendlich lange Kosinusfunktion keinen wohldefinierten Impuls besitzen soll, zumal sie doch eine wohldefinierte Wellenlänge zu besitzen scheint. Die Antwort ist für die Quantenmechanik von grundlegender Bedeutung und spiegelt sich in der Form des Impulsoperators wieder. Die zugrunde liegenden ebenen Wellen sind weder Sinus- noch Kosinusfunktionen, sondern komplexe Exponentialfunktionen. Nur sie weisen einen wohldefinierten Impuls auf.

$$\begin{aligned}(c) -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A [\cos(k_0 x) - i \sin(k_0 x)] &= -i\hbar k_0 A [-\sin(k_0 x) - i \cos(k_0 x)] \\ &= -\hbar k_0 A [-i \sin(k_0 x) + \cos(k_0 x)]\end{aligned}$$

Hier haben wir den Wert $-\hbar k_0$, der mit der ursprünglichen Funktion multipliziert wird. Die Multiplikationskonstante, der Eigenwert, ist der wohl-

definierte Wert der Observablen, daher ist der Impuls ein wohldefiniertes $-\hbar k_0$. Tatsächlich ist diese Funktion Ae^{-ik_0x} . Wie wir sehen, stellt diese komplexe Exponentialfunktion wegen des negativen Impulses ein Teilchen dar, das sich in Richtung negativer x -Werte bewegt. Im Fall von Ae^{+ik_0x} bewegt es sich in die positive Koordinatenrichtung.⁹ Dies zeigt darüber hinaus, dass $A \cos k_0x$ *keinen* wohldefinierten Impuls aufweist. Schreiben wir dies als $\cos k_0x = \frac{1}{2}(e^{+ik_0x} + e^{-ik_0x})$, dann können wir erkennen, dass es sich tatsächlich um gleichgroße Anteile zweier Wellen mit entgegengesetztem Impuls handelt. Der Erwartungswert des Impulses wäre null, doch das Teilchen könnte mit jeder Bewegungsrichtung beobachtet werden. Das gleiche Argument gilt auch für die Sinusfunktionen des unendlich tiefen Potentialtopfs.

$$(d) \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A [\cos(k_0x) - \sin(k_0x)] = i\hbar k_0 A [\sin(k_0x) + \cos(k_0x)]$$

Der Impuls ist nicht wohldefiniert. Der „fehlende“ Faktor i ist wesentlich.

Die Darstellung von Wellenfunktionen als Eigenfunktionen von Operatoren führt auf viele Anwendungen. Dieses Verfahren wird in der weiterführenden Analysis eingesetzt, beispielsweise in der Matrizen-Quantenmechanik. Ihre vermutlich wichtigste Anwendung haben wir hier vorgestellt: Mit ihr lässt sich am einfachsten prüfen, ob eine Funktion einen wohldefinierten Wert einer gegebenen Observablen besitzt.

Fortschritte und Anwendungen

Quantentöpfe als Lichtquellen

Die in den letzten Jahrzehnten erzielten Fortschritte bei der Fabrikation mikroskopisch kleiner Strukturen haben dazu geführt, dass Quantentöpfe eine wesentliche Rolle in der modernen Technik spielen. Die Töpfe bestehen aus elektrostatischen Barrieren in Halbleiterkristallen (in manchen Fällen befinden sie sich auch in Nanoröhren, wie wir in Abschnitt 10.10 noch diskutieren werden). Darin eingeschlossen sind üblicherweise das Elektron und sein Alter Ego in Halbleitern, das Loch. Wenn die Einschränkungen das Teilchen nur in einer Dimension begrenzen und es in zwei anderen im Wesentlichen frei beweglich ist, bezeichnen wir dies als **Quantentopf** (englisch *quantum well*). Ist das Teilchen in zwei Dimensionen eingeschlossen und in einer frei, sprechen wir von einem **Quantendraht**. Ist seine Bewegung in allen drei Dimensionen eingeschränkt, liegt ein **Quantenpunkt** (englisch *quantum dot*) vor. Alle drei werden hinsichtlich einer Fülle von Anwendungen erforscht. Am interessantesten ist jedoch der Quantenpunkt,

⁹ Die Bewegungsrichtung einer elektromagnetischen Welle kann anhand eines „Schnappschusses“ ermittelt werden. Es handelt sich um die Richtung, in die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ weist. Verschieben wir \mathbf{E} relativ zu \mathbf{B} um 180° , erhalten wir eine Welle, die sich in entgegengesetzter Richtung bewegt. Verschieben wir auf ähnliche Weise den Realteil einer Materiewelle, die sich in positiver Richtung ausbreitet, um 180° gegenüber dem Imaginärteil, dann wird e^{+ikx} zu e^{-ikx} und wird so zu einer Welle, die in negativer Richtung läuft.

denn mit stehenden Wellen in allen drei Raumrichtungen sind seine Niveaus am besten unter Kontrolle.

In vielerlei Hinsicht verhält sich der Quantenpunkt wie ein Designeratom. Bei beiden ist die Energie quantisiert, allerdings sind Quantenpunkte viel flexibler einsetzbar, denn ihre Größe kann für eine bestimmte Anwendungsmaßgeschneidert werden. In einer der vielversprechendsten Anwendungen bilden Quantenpunkte Lasermedien. Die meisten Laser beruhen auf materialspezifischen Übergängen zwischen Energieniveaus – bei Gaslasern befinden sich diese Energieniveaus in den Gasatomen, bei traditionellen Festkörperlaser sind es breite Energie„bänder“ innerhalb des Halbleitermaterials. Die Energieniveaus eines Quantenpunkts sind viel leichter zu kontrollieren, denn sie hängen von der einfachen Geometrie der Töpfe ab. Wie beim Teilchen im Potenzialtopf bedeutet ein kleineres L höhere Energien. Viele der früheren Schwierigkeiten bei der Herstellung gleichförmiger Quantenpunkte sind mittlerweile überwunden. Der größte Fortschritt bildete in den 1990er-Jahren die Entwicklung einer als „Self-assembly“ bezeichneten Methode, bei der mechanische Spannungen im Inneren eines wachsenden Kristalls zur spontanen Bildung pyramidenförmiger Punkte von gleichmäßiger Größe und Verteilung führen. Es können mehrere Schichten genutzt werden. Wenn sie, wie in ► Abbildung 5.20 ersichtlich, zwischen Spiegel platziert werden, bilden sie einen resonanten Hohlraum. Die vielen Punkte spielen dieselbe Rolle wie Atome in anderen Lasern. Wenn sie einmal Marktreife erlangen, sollten Quantenpunkt-Laser nicht nur eine praktische Methode darstellen, um eine beliebige Frequenz im sichtbaren Bereich zu selektieren, sondern sie sind auch kleine und effiziente Gebilde, die der steigenden Bedeutung von Licht in der Kommunikation und der Computerentwicklung Rechnung tragen.

► Abbildung 5.21 zeigt zwei Proben, hergestellt von einem Team der Sandia National Laboratories, die interessante und scheinbar entgegengesetzte Anwen-

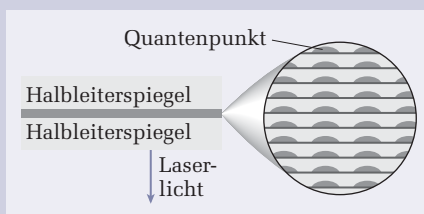


Abbildung 5.20: Ein Laser aus Quantenpunkten



Abbildung 5.21: Quantenpunkte als Lichtquellen

dungen von Quantenpunkten darstellen: Die effiziente Erzeugung normalen *weißen* Lichts. Obwohl viel effizienter als die alten Standardglühlampen, sind heutige Energiesparlampen nicht nur relativ plump geformt, sondern weisen auch eine Effizienz (das Verhältnis von sichtbar abgestrahlter zu zugeführter Energie) von nur 50 % auf. Lichtquellen auf Festkörperbasis – die ohne luftleere Gehäuse, Transformatoren und heiße Drähte auskommen – sind bereits vielfach in Gebrauch und werden eines Tages die herkömmlichen Glühlampen ebenso verdrängen, wie Transistoren ihre Vorläufer, die Vakuumröhren, verdrängt haben.¹⁰ Verbunden mit effizienten LEDs sind Quantenpunkte echte Anwärter auf die Lichtquelle der Zukunft. In verschiedenen untersuchten Varianten ist ultraviolettes Licht von LEDs, das auf Quantenpunkte trifft, durch das Wechselspiel zwischen den geometrischen Eigenschaften der Quantenpunkte und den chemischen Eigenschaften des Materials, aus denen sie bestehen, in ein breites Wellenlängenspektrum umgewandelt worden. Solche Lichtquellen sind bereits jetzt effizienter als die herkömmlichen Energiesparlampen.

DNA-Erkennung mit einem Quantenpunkt

Dass die erlaubten Energien von Quantenpunkten so gut eingestellt werden können, hat zu vielfältigen Anwendungen in Biologie und Medizin geführt. Eine, die in ► Abbildung 5.22 dargestellt ist, enthält einen Quantenpunkt als Herzstück eines äußerst empfindlichen DNA-Detektors. Zuerst werden zwei spezielle Moleküle eingeführt – eine „Einfangsonde“ (*capture probe*) und eine „Berichtsonde“ (*reporter probe*). Treffen sie auf ein DNA-Molekül, bilden sie ein Sandwich aus drei Molekülen. Der Quantenpunkt ist der wesentliche Indikator für die Entstehung des Sandwichs und damit, dass DNA vorhanden ist. Er ist in besondere Moleküle eingebettet, die eine Affinität

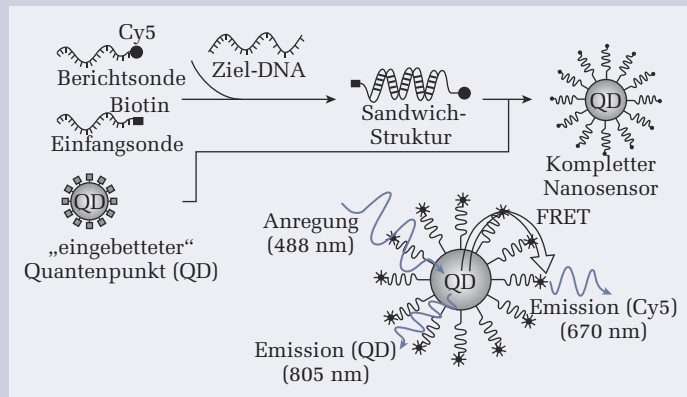


Abbildung 5.22: Ein DNA-Nanosensor mit Quantenpunkten. In einer Sandwich-Struktur eingeschlossene DNA heftet sich an einen Quantenpunkt (QD). Die „Anregungs“energie regt den Punkt an und tritt, nach dem FRET-Prozess, bei der Emission des (Cy5)-Photons in Erscheinung.

¹⁰ Per Verordnung werden in der Europäischen Union Lichtquellen, die nicht bestimmte Energiekriterien erfüllen, vom Verkauf ausgeschlossen. Im Prinzip fallen so die energetisch

für die Einfangsonde besitzen. Sobald sich das Sandwich bildet, kommen dadurch die Quantenpunkte und die Berichtssonde in enge Nachbarschaft. Nur dann können sie mithilfe eines als *fluorescence resonance energy transfer* (FRET, fluoreszierender resonanter Energieübertrag) bezeichneten Prozesses miteinander kommunizieren. In diesem ausgeklügelten Prozess regt ein Photon mit einer bestimmten Energie einen „Donor“ an – den Quantenpunkt, der in der Abbildung mit QD bezeichnet ist. Er überträgt einen Teil der Energie über eine resonante Wechselwirkung, die kein Licht erzeugt, auf den nahe gelegenen „Akzeptor“ – das Cy5. Dieses wird dann abgeregt, wobei ein Photon mit eindeutiger größerer Wellenlänge erzeugt wird. Es ist nicht leicht, auf Molekülen basierende Materialien zu finden, die auf diese Weise – durch Absorption einer Wellenlänge, Energieaustausch und Aussenden einer anderen Wellenlänge – charakteristisch und ohne Verzerrungen kommunizieren. Die vielseitigen Quantenpunkte sind hervorragende Lösungen, da sie auf ganz spezifische Anforderungen eingestellt werden können.

Halos in klassisch verbotenen Gebieten

Wellenfunktionen gebundener Teilchen erstrecken sich üblicherweise – bisweilen sogar sehr weit – in ein klassisch verbotenes Gebiet. Ein Beispiel dafür ist der Kern des schweren Wasserstoffs (Deuterium), in dem ein Neutron und ein Proton durch die gemeinsame Starke Kraft aneinander gebunden sind. Seine Teilchen sind mit höherer Wahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Gebiet zu finden als im klassisch erlaubten Gebiet. Situationen, in denen eine ungewöhnlich große Eindringtiefe in das verbotene Gebiet vorliegt, stoßen immer wieder auf großes Interesse. Die außerhalb liegenden Bereiche der Wellenfunktion werden als **Halos** bezeichnet. Obwohl auch Elektronen in Atomen und Atome in Molekülen Halos bilden, werden am intensivsten die Halos spezieller Moleküle untersucht, in denen ein Neutronenüberschuss zu diesem Halo führt. Beispielsweise sind in den häufig vorkommenden Kernen des Helium-4 zwei Protonen und zwei Neutronen sehr eng aneinander gebunden. Helium-6, das in ► Abbildung 5.23 dargestellt ist, enthält zwei weitere Neutronen, die sich in vom Atomkern weitentfernte Gebiete hinein bewegen. Die Kräfte im Atomkern sind äußerst kompliziert, und Halos bieten hier wichtige Möglichkeiten zur Enthüllung der Vorgänge im Atomkern.

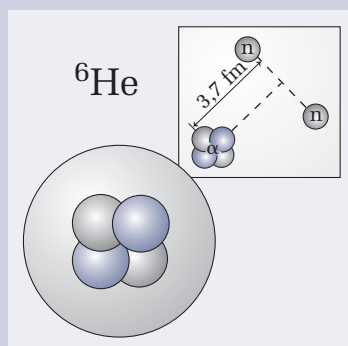


Abbildung 5.23: Ein Halo aus zwei Neutronen, der einen Heliumkern umgibt

ungünstigen Glühlampen, die überwiegend Wärme und nur wenig Licht produzieren, unter den Tisch. Die stromsparenderen Energiesparlampen enthalten allerdings Quecksilber, weshalb sie immer mehr in Verruf geraten. LEDs in der Form von Glühlampen benötigen bei vergleichbarer Lichtstärke geringere Strommengen als Energiesparlampen und sind vermutlich die Lichtquelle der nahen Zukunft. A. d. Ü.

Zusammenfassung von Kapitel 5

Um das quantenmechanische Verhalten großer Objekte zu verstehen, müssen wir die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ kennen, die eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist. In Anwesenheit der potenziellen Energie $U(x)$ lautet sie

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (5.2)$$

Das Lösen der Schrödinger-Gleichung für $\Psi(x, t)$ entspricht grob der klassischen Prozedur zur Lösung von $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ für $\mathbf{r}(t)$. Die Separation der Variablen liefert die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (5.10)$$

Die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ wird zu $\psi(x)e^{-iE\hbar t}$. Man spricht hier von einem stationären Zustand. Seine Energie E ist wohldefiniert und seine Wahrscheinlichkeitsdichte verändert sich zeitlich nicht. Eine quantenmechanische Behandlung ist in kleinen Systemen immer dann vonnöten, wenn die Dimensionen vergleichbar mit der oder kleiner als die Wellenlänge von $\Psi(x, t)$ werden. Ein derartiges System kann nicht ständig beobachtet werden, um Ort, Impuls usw. im Auge zu behalten. Denn dann müsste ein Beobachter irgendwie mit dem System in Wechselwirkung treten, wodurch genau das zu untersuchende Verhalten gestört wird. Werden keine Anstrengungen unternommen, es tatsächlich aufzuspüren, dann reagiert ein massereiches Objekt in einem kleinen System nicht wie ein Teilchen, sondern wie eine Welle.

Wenn ein solches Objekt gebunden wird, erfüllen nur bestimmte Wellenfunktionen die physikalischen Randbedingungen der Glätte und Normierbarkeit, die zu stehenden Wellen gehören. Dies ist die Grundlage der Energiequantisierung, bei der die Energie auf bestimmte Gruppen erlaubter Werte eingeschränkt ist, zu denen jeweils eine Wellenfunktion gehört. Bei allen gebundenen Zuständen ist die Minimalenergie von null verschieden – ist ein Teilchen gebunden, kann es also nicht völlig in Ruhe sein. Drei einfache Fälle gebundener Teilchen dienen oft als Modelle für die komplizierteren Systeme: Der endlich tiefe Topf, bei dem Energien und Wellenfunktion mittels einer numerischen Lösung gefunden werden müssen, der harmonische Oszillator, dessen Energien

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (5.26)$$

betragen, sowie der unendlich tiefe Potenzialtopf, auch als Teilchen in einem Kasten bekannt, mit den Energien und Wellenfunktionen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (5.16)$$

Im Grenzbereich hoher Energien fallen die Aussagen der Quantenmechanik und der klassischen Mechanik zusammen.

Beobachtungen werden von Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Ein Experiment, das einen Wert für eine Observable wie beispielsweise Ort oder Impuls ermittelt,

würde im Allgemeinen unterschiedliche Werte liefern, wenn es immer wieder auf identische Weise wiederholt würde. Das Experiment kann nicht einfach eine spätere Beobachtung des gleichen Systems sein, da es von jeder Beobachtung gestört wird. Das Ergebnis vieler gleichartiger Wiederholungen würde auf einen Mittelwert führen, der als Erwartungswert bezeichnet wird, sowie auf eine Standardabweichung, die in der Quantenmechanik als Definition der Unbestimmtheit verwendet wird. Sie können anhand der Wellenfunktion mittels

$$\bar{Q} = \int_{\text{gesamter Raum}} \Psi^*(x, t) \hat{Q} \Psi(x, t) dx$$

und

$$\Delta Q = \sqrt{\overline{Q^2} - \bar{Q}^2}$$

bestimmt werden, wobei \hat{Q} der mit einer Observablen verknüpfte Operator ist.

Ein gebundenes Teilchen kann zwischen zwei stationären Zuständen wechseln. Zu diesen Zeiten *verändert* sich seine Wahrscheinlichkeitsdichte im Lauf der Zeit: Sie oszilliert. Wenn ein geladenes Teilchen auf ein Niveau niedrigerer Energie springt, ist die Schwingungsfrequenz seiner Ladungsdichte gerade groß genug, um ein Photon zu erzeugen, welches die Energiedifferenz davonträgt.



Antworten

Verständnisfragen

- 1 Die Quantisierung ist eine wichtige Eigenschaft von Systemen, in denen ein Teilchen in einem kleinen Gebiet gebunden ist. Warum heißt es hier „klein“ und „gebunden“?
- 2 Ein Student der klassischen Physik sagt: „Ein geladenes Teilchen, beispielsweise ein Elektron in einem einfachen Atom, sollte nicht nur bestimmte stabile Energien aufweisen. Eigentlich sollte es durch die elektromagnetische Strahlung Energie verlieren, bis das Atom zusammenbricht.“ Geben Sie eine qualitative Antwort auf beide Fragen. Setzen Sie dabei so wenig grundlegende Aussagen der Quantenmechanik wie möglich ein.
- 3 Der Begriff *Wechselwirkung* wird bisweilen als Synonym für *Kraft* verwendet, zu anderen Zeiten als Synonym für potenzielle Energie. Mit welcher Berechtigung kann, obwohl Kraft und potenzielle Energie sicher nicht das Gleiche sind, derselbe Begriff für beides stehen?
- 4 Einer Ihrer Freunde bezweifelt die Energiequantisierung. Erläutern Sie ihm den einfachen Fingerzeig, den Sie sehen können, wenn Sie eine CD in die Nähe einer fluoreszierenden Lichtquelle halten (wodurch sie als Beugungsgitter dient). Es könnte hilfreich sein, diesen Befund mit dem Spektrum einer glühenden Lichtquelle zu vergleichen. Bei einer solchen Quelle beruht die Emission auf dem Erhitzen eines Drahtfilaments, welches ein eher unspezifisches Schwarzkörperspektrum hervorruft.
- 5 Was ist stationär in einem stationären Zustand? Das Teilchen? Etwas anderes?

- 6** Wann ist der zeitliche Teil der Wellenfunktion null? Warum ist das wichtig?
- 7** Wir haben gesagt, dass der Grundzustand für Teilchen in einem Kasten eine von null verschiedene Energie aufweist. Was geht mit ψ in Gleichung (5.16) schief, wenn $n = 0$ ist?
- 8** Gleichung (5.16) liefert die Energien für den unendlich tiefen Topf. Weil Gleichung (5.22) nicht in geschlossener Form gelöst werden kann, gibt es keine ähnlich kompakte Formel für die Energien im endlich tiefen Topf. Aber auch ohne Formel sind viele Folgerungen möglich. Argumentieren Sie rein qualitativ, dass sich immer weniger gebundene Zustände in einem endlich tiefen Topf befinden, wenn sich dessen Wände aufeinander zu bewegen, sich ihre Höhe aber nicht verändert. (Stellen Sie eine klare Verbindung zwischen der Breite des Topfs und seiner Höhe her.)
- 9** Ein *halber* unendlich tiefer Topf besitzt im Ursprung eine unendlich hohe Wand und eine Wand von endlicher Höhe U_0 bei $x = L$. Wie beim unendlich tiefen Topf ist die Anzahl der erlaubten Zustände begrenzt. Nehmen Sie an, er habe zwei Zustände mit den Energien E_1 und E_2 , wobei E_2 nur wenig unter U_0 liegt. Skizzieren Sie die potenzielle Energie und fügen Sie dann auf unterschiedlichen horizontalen Achsen, deren Höhen E_1 und E_2 betragen, plausible Skizzen der beiden erlaubten Wellenfunktionen hinzu.
- 10** Betrachten Sie ein Teilchen im Grundzustand eines endlich tiefen Topfs. Beschreiben Sie die Änderungen seiner Wellenfunktion und Energie, wenn die Wände allmählich immer höher gemacht werden (d. h., U_0 steigt an), bis sie praktisch unendlich hoch werden.
- 11** Ein Teilchen unterliegt einer potenziellen Energie, die im Wesentlichen eine unendlich hohe Wand im Zentrum aufweist, ähnlich wie beim unendlich tiefen Topf, bei positiven x aber die Form $U(x) = -b/x$ mit einer Konstanten b annimmt. (a) Skizzieren Sie die potenzielle Energie. (b) Wie viel Energie könnte ein klassisches Teilchen besitzen und in einem derartigen Potential immer noch gebunden sein? (c) Fügen Sie Ihrer Skizze eine Kurve für das E eines gebundenen Teilchens hinzu und kennzeichnen Sie den äußeren klassischen Umkehrpunkt (der innere befindet sich im Ursprung). (d) Skizzieren Sie unter der Annahme, dass eine quantenmechanische Beschreibung richtig ist, eine plausible Wellenfunktion des Grundzustands und stellen Sie sicher, dass die zweite Ableitung Ihrer Funktion das richtige Vorzeichen aufweist, wenn $U(x)$ kleiner als E und wenn $U(x)$ größer als E ist.
- 12** Einfache Modelle sind äußerst nützlich. Betrachten Sie die beiden identischen Töpfe in der Abbildung unten; sie haben zuerst einen geringen Abstand und rücken dann immer weiter auseinander. In allen Fällen sind die vier niedrigsten erlaubten Wellenfunktionen auf Achsen aufgetragen, die proportional zu ihren Energien sind. Wir können erkennen, dass sie das klassisch verbotene Gebiet zwischen den Töpfen durchdringen, und erkennen zudem einen Trend: Stehen die Töpfe dicht beieinander, dann entsprechen die vier Funktionen und Energien dem, was wir von einem einzelnen endlich tiefen Topf erwarten. Sobald sie aber auseinander rücken, konvergieren Paare von Funktionen auf dazwischen liegende Energien. (a) Die

Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: info@pearson.de

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

<http://ebooks.pearson.de>