HEINZ PARTOLL, IRMGARD WAGNER

ILLUSTRIERT VON WERNER TIKI KÜSTENMACHER

MATHE macchiato

Fit für's Abi

2. Auflage

PEARSON

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umwelthinweis:
Dieses Produkt wurde auf chlor- und säurefreiem PECF-zertifiziertem Papier gedruckt. Um Rohstoffe zu sparen, haben wir auf Folienverpackung verzichtet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
12 11 10

ISBN 978-3-86894-026-8

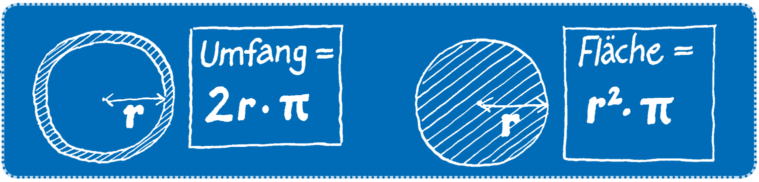
ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH
Martin-Kollar-Str. 10-12, D-81829 München

www.pearson-studium.de

Lektorat: Birger Peil, bpeil@pearson.de, Irmgard Wagner, irmwagner@t-online.de
Korrektorat: Petra Kienle, Fürstenfeldbruck
Herstellung: Martha Kürzl-Harrison, mkuerzl@pearson.de
Satz: m2 design, Sterzing, www.m2-design.org
Druck und Verarbeitung: Bercker, Kevelaer

Printed in Germany

Die Lösung ist eine Formel mit einer Konstanten, eben der Kreiszahl π („Pi“), die uns schon seit längerem im Fußtext begleitet. Der Umfang eines Kreises ist das Doppelte des Radius multipliziert mit dieser unbekannten Zahl. Die Fläche des Kreises ist das Quadrat des Radius (Radius mal Radius) multipliziert mit π.



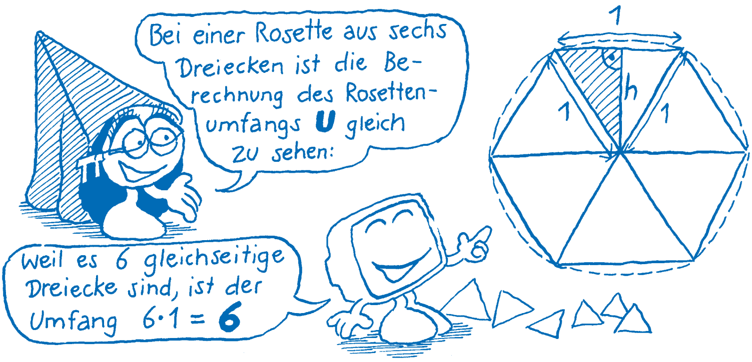
Der Grieche Archimedes lebte zu Beginn des dritten Jahrhunderts vor Christus in Syrakus (Sizilien).

Als die Stadt von den Römern erobert wurde, saß der greise Mathematiker im Garten und zeichnete Figuren in den Sand. Sein Leben lang war er auf der Suche nach Annäherungen für die Kreiszahl π. Ein römischer Legionär betrat mit festem Schritt den Garten. Der Greis bemerkte, dass ein Fuß in seine Linien tritt und er sprach die berühmten Worte: „Störe meine Kreise nicht."

Fast im gleichen Augenblick setzt das Schwert des Legionärs seinem Leben ein Ende.

Wie weit wäre die Mathematik heute, hätte er länger leben dürfen?

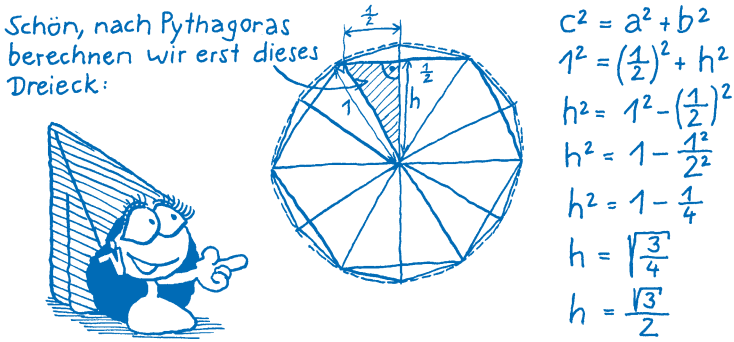
So funktioniert die Berechnung mit Annäherung. Man konstruiert Vielecke mit 6, 12, 24, 48, ... oder noch mehr Ecken. Also eine Art Rosette, die einem Kreis sehr ähnlich wird. Die Fläche der Dreiecke in der Rosette lässt sich berechnen.

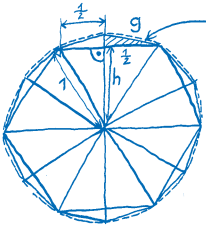


Mit einer sechseckigen Rosette wird π noch sehr schlecht angenähert.

Mit einem 12-Eck kommt man der Sache schon näher ...

Im Gegensatz zum 6-Eck müssen wir hier wirklich rechnen. Wir verwenden wieder einen Kreis mit dem Radius 1. π ist dann der halbe Kreisumfang, wie die obere Formel zeigt. Der Umfang des 12-Ecks ist 12-mal die Seite. Um die 12-Eck-Seite zu berechnen, brauchen wir zweimal die Formel von Pythagoras.





Und dann dieses:

$$g^2 = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$g^2 = 1-\frac{2\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$$

$$g = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Das ergibt einen Näherungswert für π von immerhin

$$\frac{12\cdot g}{2} = 6\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3{,}1058\ldots$$

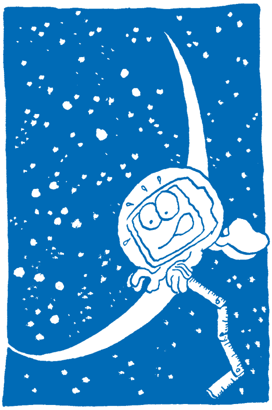
Erst bei ziemlich vielen Ecken wird der Näherungswert annehmbar genau.

Noch genauer wird es, wenn man mit zwei Vielecken arbeitet, die den Kreis außen und innen umgeben: Außen und innen um den Kreis herum wird jeweils eine Rosette gezeichnet und berechnet. Der Umfang des Kreises muss zwischen den Umfängen der beiden Rosetten liegen. Je mehr Ecken man den Rosetten gönnt, umso genauer wird das Ganze.

Archimedes fing ebenfalls mit einem Sechseck an. Er verdoppelte diesen Wert viermal (bis zum 96-Eck) und engte den Wert von π damit auf das Intervall $3\frac{10}{71}$ von bis $3\frac{1}{7}$ ein. Bis Mitte des 17. Jahrhunderts griffen fast alle Versuche, π zu berechnen, auf diese Methode zurück.

π ist eine Zahl mit unendlich vielen Dezimalstellen. Du findest die ersten 1000 am unteren Rand dieses Kapitels.

Zur Veranschaulichung, wie wahnsinnig eine derart hohe Genauigkeit von π ist, folgende absurde Handwerkergeschichte:



Stell dir vor, du bekommst von der amerikanischen Regierung den Auftrag, einen Edelstahlring um unser gesamtes Milchstraßensystem zu legen (der Zweck dieses Unternehmens ist strengste Geheimsache!). Der Ring muss äußerst präzise sein und auf einen millionstel Millimeter genau stimmen. Bevor du den Auftrag annimmst, solltest du ausrechnen, ob der Edelstahlvorrat unseres Planeten überhaupt ausreicht und willst natürlich auch noch ein paar äußerst genaue Berechnungen und Pläne beilegen. Wie viele Nachkommastellen von π wirst du benötigen, damit das Stück auch wirklich auf den millionstel Millimeter genau berechnet wird? Allerhöchstens 35 Stellen!

Da kannst du mal sehen, welche absolut außerirdische und sogar außergalaktische Genauigkeit in diesem preiswerten Büchlein steckt!

INTERNET

Beispiel 3.1: Deine Daumenbreite als Entfernungsmessgerät

Beispiel 3.2: Die Kunst der ägyptischen Pyramidenbauer – weitere Knotenschnüre

Beispiel 3.3: Die Möndchen des Hippokrates

34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066

Die Grundelemente der Geometrie sind **Punkt**, **Strecke**, **ebene Figur** (z.B. Dreieck).

Die Regeln für die Ähnlichkeit lassen interessante Berechnung zu.

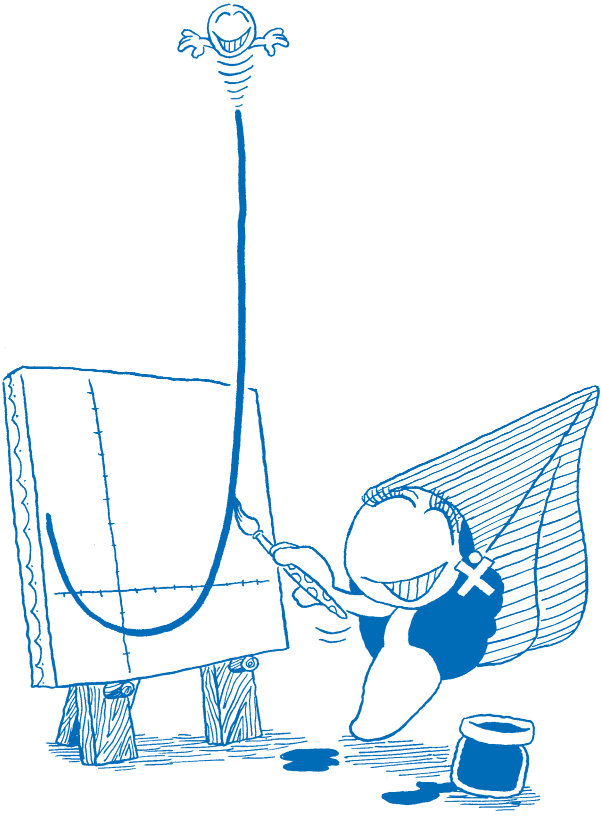
Ist im Dreieck ein Winkel 90°, kann mit Hilfe des **Pythagoreischen Lehrsatzes** aus zwei Seiten die dritte berechnet werden.

Auch wenn die Einheit der **Flächenmessung** ein Quadrat ist, kann für jede durch Strecken begrenzte Fläche wie Dreieck, Fünfeck etc. eine Maßzahl gefunden werden. Die wichtigste Grundformel ist die für das Dreieck, weil sich Vielecke in Dreiecke zerlegen lassen.

Auch **Kreise** lassen sich vermessen. Die Grundlage bildet die irrationale Zahl π, mit deren Hilfe der Umfang und die Fläche zu berechnen sind.

Malen nach Zahlen

4



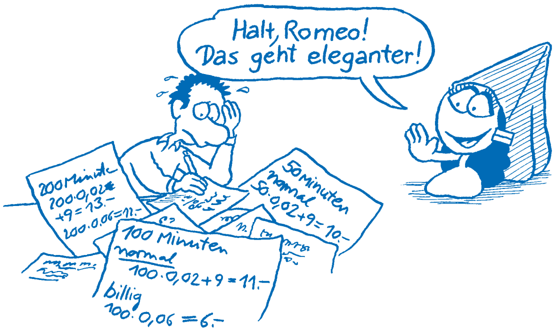
Funktionen, Koordinaten und Graphen

Mathematische Beziehungskiste

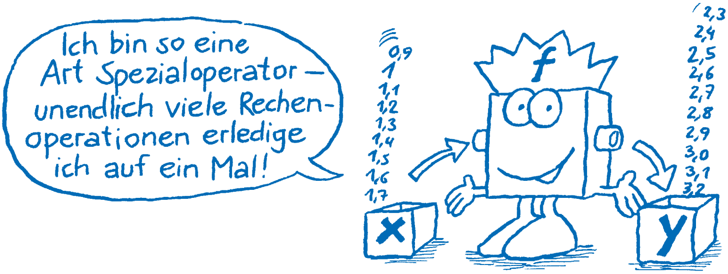
Grundlegende Begriffe

Beginnen wir mit einer der berühmtesten Beziehungskisten, leicht modernisiert: Romeo will mehr Kontakt zu seiner Julia. Deswegen möchte er ihr ein Handy schenken und bei seinem Provider anmelden. Aber zu welchem Tarif? Es gibt einen Normaltarif mit 9 Talern monatlicher Grundgebühr und 0,02 Talern pro Gesprächsminute (von Handy zu Handy im selben Netz, denn beide wollen ja vor allem turteln, wenn sie getrennt voneinander unterwegs sind). Daneben bietet der Provider noch einen Billigtarif für Leute, die wenig telefonieren: keine Grundgebühr, aber pro Gesprächsminute stolze 0,06. Ab wann lohnt sich für unser Pärchen der Normaltarif?

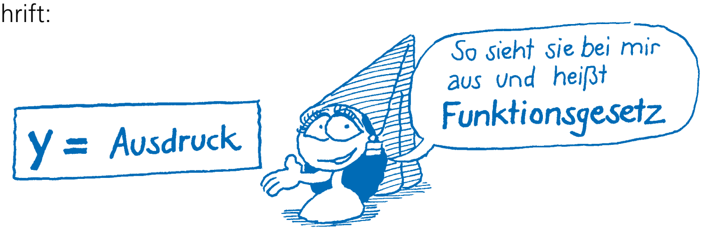
Romeo könnte durch Probieren auf eine Lösung kommen: für unterschiedliche Gesprächsdauer die beiden Tarife ausrechnen und vergleichen.

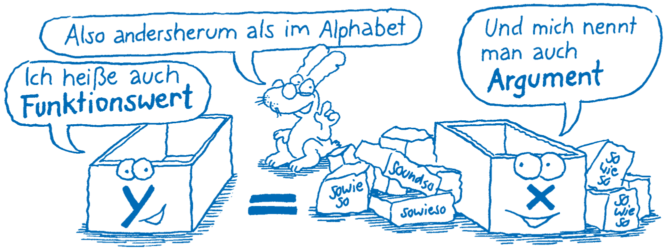


Genial wäre eine Methode, die ein System in diese Probiererei bringt. Die gibt es tatsächlich! Stell dir einen Operator vor, in den du nicht wahllos (wie Romeo) verschiedene Zahlenwerte eingibst, sondern wo du durch eine gezielte Eingabe von wenigen Werten sehr schnell zu einem Ergebnis kommst. Bei diesem Operator steht bei der Ein- und Ausgabe je eine Schachtel. Die Eingabe nennen wir x, die Ausgabe y. Als Ergebnis kommt eine Liste heraus, in der es zu jedem Wert von x einen y-Wert gibt. Man könnte auch sagen: Unser neuer Spezialoperator setzt die x- und die y-Kiste zueinander in Beziehung.

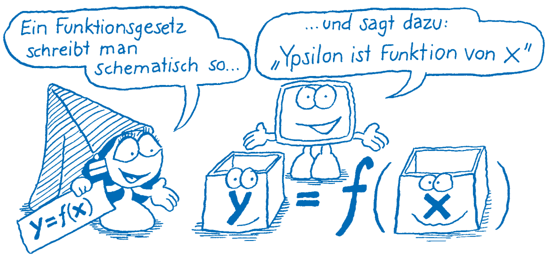


Der offizielle Name für diesen ausgesprochen bequemen Superoperator ist „Funktion". Im Grunde genommen besteht er aus einer Rechenvorschrift:





Für jeden beliebigen Wert von x, den du auf der rechten Seite einsetzt, gibt die **Funktion** auf der linken Seite einen bestimmten Wert von y aus. Das „Argument“ x bezeichnet man auch als „unabhängige Variable“, den Funktionswert y als „abhängige Variable“, denn sein Wert hängt ja von x ab.



Eine Funktion ist eine Art Transformator, der wie ein Operator aus einer Eingangsgröße eine einzige Ausgangsgröße erzeugt. Es gibt auch Funktionen mit mehreren Eingängen, aber die brauchst du erst für kompliziertere Probleme. Deshalb beschränken wir uns auf Funktionen mit einem Eingang. Die haben den Vorteil, dass sie ihre Ergebnisse nicht nur als Liste, sondern sozusagen in Comicform ausgeben können.

Am schnellsten wirst du das Wesen einer Funktion verstehen, wenn du sie in gezeichneter Form siehst.