Jetzt mit eLearning
#besser lernen

Analysis 1

Lehr- und Übungsbuch

12., aktualisierte Auflage

George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass

Pearson

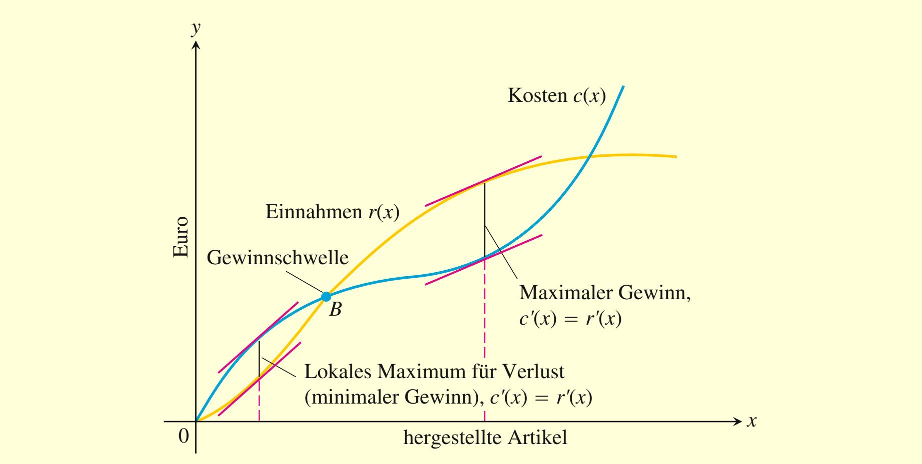


Abbildung 4.39 Der Graph einer typischen Kostenfunktion beginnt konkav und wird später konvex. Er schneidet die Einnahmen an der Gewinnschwelle (engl. *break even point*) B. Links von B arbeitet das Unternehmen mit Verlust, rechts davon arbeitet das Unternehmen mit Gewinn, wobei der maximale Gewinn bei $c'(x) = r'(x)$ erzielt wird. Weiter rechts davon übersteigen die Kosten die Einnahmen (vielleicht aufgrund einer Kombination aus steigendem Personalaufwand und steigenden Materialkosten sowie Marktsättigung), und das Produktionsniveau wird wieder nicht gewinnbringend.

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414.$$

Die möglichen Produktionsniveaus für maximalen Gewinn sind $x \approx 0{,}586$ Millionen MP3-Player oder $x \approx 3{,}414$ Millionen MP3-Player. Die zweite Ableitung von $p(x) = r(x) - c(x)$ ist $p''(x) = -c''(x)$, weil $r''(x)$ überall null ist. Folglich ist $p''(x) = 6(2 - x)$, was an der Stelle $x = 2 + \sqrt{2}$ negativ und an der Stelle $x = 2 - \sqrt{2}$ positiv ist. Nach dem Test mithilfe der zweiten Ableitung wird der maximale Gewinn bei etwa $x = 3{,}414$ Millionen MP3-Playern erzielt (wo die Einnahmen die Kosten übersteigen), und der maximale Verlust tritt bei etwa $x = 0{,}586$ Millionen MP3-Playern auf. Die Graphen von $r(x)$ und $c(x)$ sind in ►Abbildung 4.40 dargestellt. ■

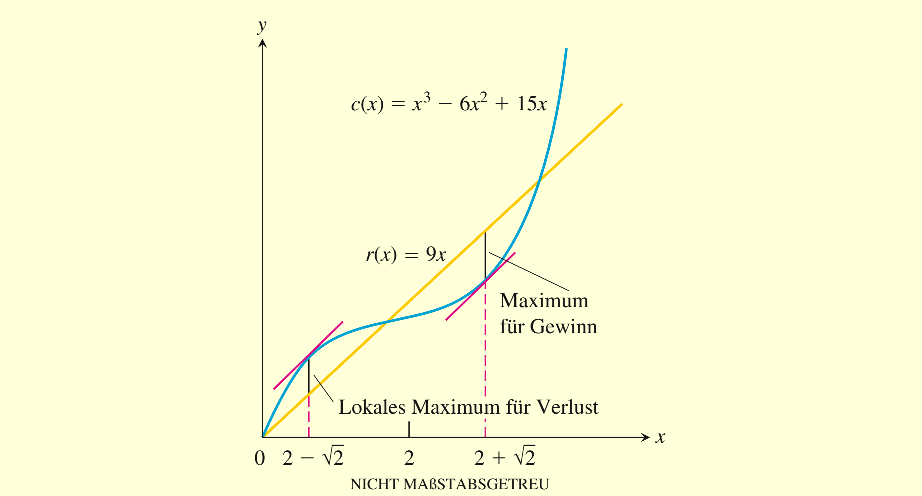


Abbildung 4.40 Die Graphen der Kosten und Einnahmen aus Beispiel 4.24.

Aufgaben zum Abschnitt 4.5

Mathematische Anwendungen Jedesmal, wenn Sie eine Funktion einer einzigen Variablen maximieren oder minimieren, sollen Sie die Funktion über dem Definitionsbereich zeichnen, der zu dem von Ihnen zu lösenden Problem passt. Der Graph wird Ihnen, noch bevor Sie rechnen, Einsichten liefern und Ihnen eine visuelle Grundlage zum Verständnis Ihrer Antwort bieten.

1. **Umfang minimieren** Was ist der kleinste Umfang, den ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von $100\,\text{cm}^2$ haben kann, und was sind die Abmessungen dieses Rechtecks?

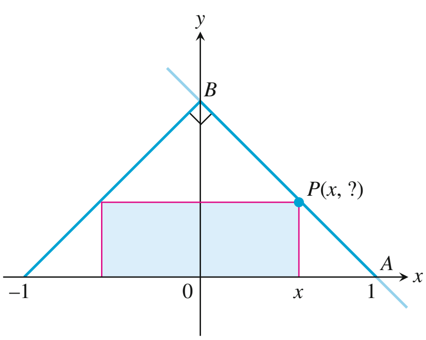
2. Zeigen Sie, dass unter allen Rechtecken mit einem Umfang von 8 m das flächengrößte ein Quadrat ist.

3. Die nachfolgende Abbildung zeigt ein Rechteck, das einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck eingeschrieben ist, dessen Hypotenuse 2 Einheiten lang ist.

a. Drücken Sie die y-Koordinate von P als Funktion von x aus. (*Hinweis*: Schreiben Sie eine Gleichung für die Gerade AB auf.)

b. Drücken Sie den Flächeninhalt des Rechtecks als Funktion von x aus.

c. Was ist der größte Flächeninhalt, den das Rechteck haben kann, und welche Abmessungen hat es dann?



4. Sie wollen eine offene rechteckige Schachtel aus einem $20\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$ großen Pappstück herstellen, indem Sie kongruente Quadrate aus den Ecken herausschneiden und die Seiten nach oben falten. Was sind die Abmessungen einer Schachtel mit dem maximalen Volumen, die Sie auf diese Weise herstellen können, und was ist ihr Volumen?

5. **Der beste Umzäunungsplan** Ein rechteckiges Stück Ackerland ist an einer Seite durch einen Fluss begrenzt und an den anderen drei Seiten durch einen elektrischen Weidezaun mit einem Draht. Ihnen stehen 800 m Draht zur Verfügung. Was ist die größte Fläche, die Sie damit umschließen können, und was sind die Abmessungen dieser Fläche?

6. **Einen Behälter entwerfen** Ihre Stahlhütte hat den Auftrag übernommen, einen $32\,\text{m}^3$ fassenden, rechteckigen Stahlbehälter für eine Papierfabrik zu entwerfen und zu bauen. Er soll eine quadratische Grundfläche haben und nach oben offen sein. Der Behälter soll hergestellt werden, indem man Edelstahlplatten entlang ihrer Kanten verschweißt. Als Fertigungsplaner ist es Ihre Aufgabe, die Abmessungen der Grundfläche und die Höhe so zu bestimmen, dass das Gewicht des Behälters so gering wie möglich ist.

a. Welche Abmessungen geben Sie an die Fertigung weiter?

b. Beschreiben Sie kurz, wie sie das Gewicht berücksichtigt haben.

7. **Ein Poster entwerfen** Sie entwerfen ein rechteckiges Poster, das $300\,\text{cm}^3$ Druckfläche haben soll. Oben und unten soll der Rand 10 cm sein, an den Seiten jeweils 5 cm. Welche Gesamtabmessungen minimieren die verbrauchte Papiermenge?

8. Zwei Seiten eines Dreiecks haben die Längen a und b, der Winkel zwischen diesen beiden Seiten ist θ. Welcher Wert von θ maximiert den Flächeninhalt des Dreiecks? (*Hinweis*: $A = (1/2)ab\sin\theta$.)

9. **Eine Dose entwerfen** Entwerfen Sie einen $1000\,\text{cm}^3$ fassenden geraden Kreiszylinder, bei dessen Herstellung der Abfall berücksichtigt wird. Beim Schneiden des Aluminiums für die Seitenfläche gibt es keinen Abfall, aber Boden und Deckel mit dem Radius r werden aus Quadraten ausgeschnitten, deren Seitenlänge $2r$ ist. Die für eine Dose verbrauchte Gesamtmenge von Aluminium ist deshalb nicht $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ wie in Beispiel 4.21, sondern

$$A = 8r^2 + 2\pi rh\,.$$

In Beispiel 4.21 war das Verhältnis von h zu r für die wirtschaftlichste Dose 2 zu 1. Wie ist das Verhältnis nun?

10. Einen Koffer entwerfen Ein Pappbogen von $60\,\text{cm} \times 90\,\text{cm}$ wird, wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt, zu einem Rechteck von $60\,\text{cm} \times 45\,\text{cm}$ gefaltet. Dann werden vier gleiche Quadrate mit der Seitenlänge x aus den Ecken des gefalteten Bogens ausgeschnitten. Danach wird der Bogen aufgeklappt, und die sechs Seitenflügel werden nach oben gefaltet, sodass sie einen Kasten mit Seiten und einem Deckel bilden.

a. Geben Sie eine Formel für das Volumen $V(x)$ des Kastens an.

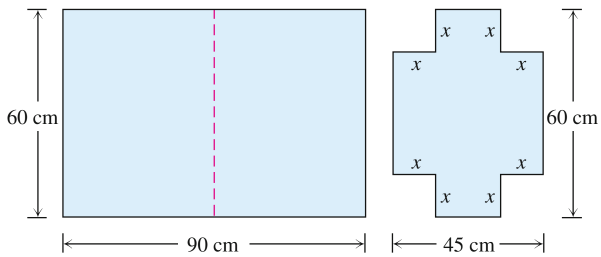
b. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von V in der gegebenen Situation und zeichnen Sie den Graphen der Funktion V auf ihrem Definitionsbereich.

c. Bestimmen Sie anhand des Graphen das maximale Volumen und den Wert von x, der es liefert.

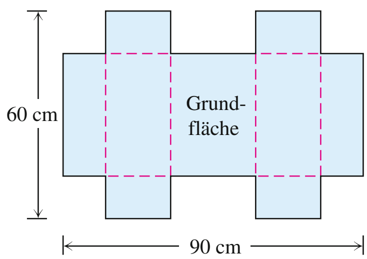
d. Bestätigen Sie Ihre Ergebnisse aus **c** analytisch.

e. Bestimmen Sie einen Wert von x, der ein Volumen von $19\,008\,\text{cm}^3$ liefert.

f. Beschreiben Sie kurz, was Sie in Teil **b.** beobachten.



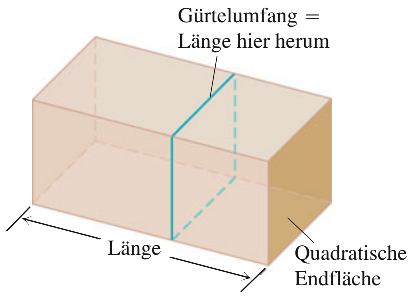
Der Bogen wird dann aufgeklappt.



11. Bestimmen Sie die Abmessungen eines geraden Kreiszylinders mit maximalem Volumen, der einer Kugel mit dem Radius $10\,\text{cm}$ eingeschrieben werden kann.

12. **a.** Der U.S. Postal Service akzeptiert eine Transportbox für Tiere nur, wenn die Summe ihrer Länge und ihres Gürtelumfangs 274 cm nicht übersteigt. Welche Abmessungen würden Sie für eine Transportbox mit quadratischen Endflächen wählen, um das größte Volumen zu erhalten?

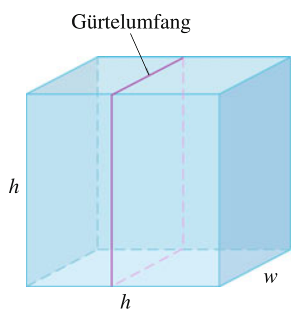
b. Stellen Sie das Volumen einer Transportbox (Länge plus Umfang gleich 274 cm) als Funktion ihrer Länge grafisch dar und vergleichen Sie Ihre Erkenntnisse aus der Betrachtung des Graphen mit Ihrer Antwort aus Teil **a.**



13. *Fortsetzung von Aufgabe 12*

a. Nehmen Sie an, dass die Transportbox keine quadratischen Endflächen, sondern quadratische Seitenflächen hat, sodass die Abmessungen $h \times h \times w$ sind und der Umfang $2h + 2w$ ist. Welche Abmessungen liefern nun die Transportbox mit maximalem Volumen?

b. Stellen Sie das Volumen als Funktion von h grafisch dar und vergleichen Sie Ihre Erkenntnisse aus der Beobachtung des Graphen mit Ihrer Antwort aus Teil **a.**



14. Ein Silo (ausschließlich der Grundfläche) soll in Form eines Zylinders konstruiert werden, der von einer Halbkugel bedeckt wird. Die Konstruktionskosten sind pro Flächeneinheit für die Halbkugel doppelt so groß wie für die zylindrische Seitenfläche. Bestimmen Sie die zu verwendenden Abmessungen, wenn das Volumen fest ist und die Konstruktionskosten minimal sein sollen. Vernachlässigen Sie die Dicke des Silos und den Konstruktionsabfall.

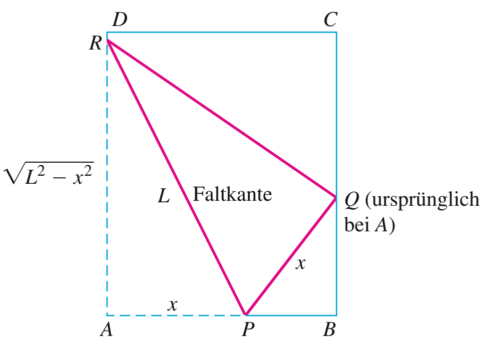
15. **Papier falten** Ein rechteckiges Blatt Papier mit den Abmessungen 21,6 cm × 27,9 cm (US-Letter-Format) wird auf eine flache Oberfläche gelegt. Eine der Ecken wird auf die gegenüberliegende lange Kante gelegt, wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt, und dort festgehalten, während das Papier wieder flach gedrückt wird. Das Problem besteht darin, die Faltkante so kurz wie möglich zu machen. Ihre Länge sei L. Experimentieren Sie mit einem echten Blatt Papier.

a. Zeigen Sie, dass $L^2 = 2x^3/(2x - 21{,}6)$ ist.

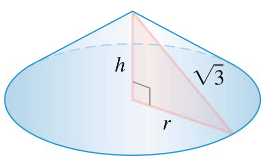
b. Welcher Wert von x minimiert L^2?

c. Was ist der minimale Wert von L?

d. Wie lauten die Ergebnisse, wenn Sie mit einem DIN-A4-Bogen arbeiten (Abmessungen 21,0 × 29,7 cm)?



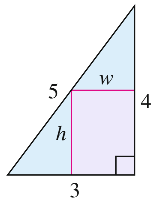
16. **Kegel konstruieren** Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\sqrt{3}$ wird um einen seiner Schenkel gedreht, sodass ein gerader Kreiskegel entsteht. Bestimmen Sie Radius, Höhe und Volumen des Kegels mit dem maximalen Volumen, der auf diese Weise konstruiert werden kann.



17. Bestimmen Sie eine positive Zahl, für die ihre Summe mit ihrem Kehrwert am kleinsten ist.

18. Ein b m langer Draht wird in zwei Teile zerschnitten. Ein Teil wird zu einem gleichseitigen Dreieck gebogen und der andere zu einem Kreis. Die Summe des von beiden Teilen eingeschlossenen Flächeninhalts soll minimal sein. Wie lang ist dann jedes Teil?

19. Bestimmen Sie die Abmessungen eines Rechtecks mit dem maximalen Flächeninhalt, das einem rechtwinkligen Dreieck eingeschrieben werden kann, wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



20. Welcher Wert von a führt dazu, dass die Funktion $f(x) = x^2 + (a/x)$

a. an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum hat?

b. an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt hat?

Physikalische Anwendungen

21. **Vertikale Bewegung** Die Höhe über dem Boden eines sich vertikal bewegenden Körpers ist

$$s = -16t^2 + 96t + 112\,.$$

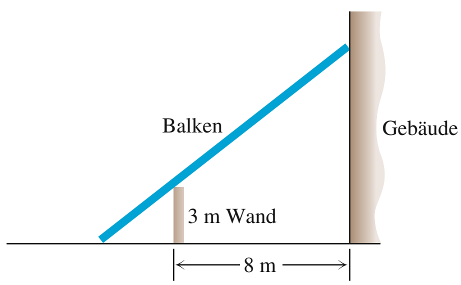
s wird in Metern und t in Sekunden gemessen. Bestimmen Sie:

a. Die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit $t = 0$.

b. Seine maximale Höhe und wann diese erreicht wird.

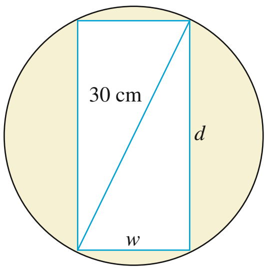
c. Die Geschwindigkeit des Körpers bei $s = 0$.

22. **Kürzester Balken** Eine 3 m hohe Mauer steht in einem Abstand von 8 m vor einem Gebäude. Bestimmen Sie die Länge des kürzesten geraden Balkens, der die Seite des Gebäudes vom Boden außerhalb des Gebäudes aus erreicht.



23. Die Intensität der Beleuchtung durch eine Lichtquelle ist an jedem Punkt proportional zum Quadrat des Kehrwerts des Abstands zwischen dem Punkt und der Lichtquelle. Zwei Lichtquellen, von denen eine die achtfache Intensität der anderen hat, befinden sich 6 m voneinander entfernt. Wie weit von der stärkeren Lichtquelle ist die Gesamtbeleuchtung am geringsten?

24. **Belastbarkeit eines Balkens** Die Belastbarkeit S eines rechteckigen Holzbalkens ist proportional zu seiner Breite w mal seiner Dicke d zum Quadrat (nachfolgende Abbildung).

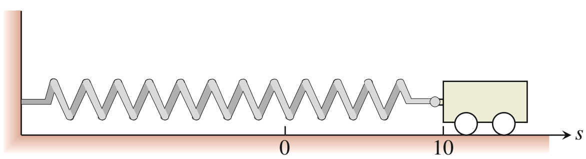


a. Bestimmen Sie die Abmessungen des stärksten Balkens, der aus einem zylindrischen Holzstamm mit 30 cm Durchmesser geschnitten werden kann.

b. Stellen Sie S mit der Proportionalitätskonstanten $k = 1$ als Funktion der Breite des Stamms w grafisch dar. Vergleichen Sie Ihre Beobachtungen mit Ihrer Antwort aus Teil **a**.

c. Zeichnen Sie nun den Graphen von S als Funktion der Dicke des Balkens d. Setzen Sie wieder $k = 1$. Vergleichen Sie die beiden Graphen miteinander und mit Ihrer Antwort aus Teil **a**. Wie würde sich der Übergang zu einem anderen Wert der Proportionalitätskonstante k auswirken? Probieren Sie es aus!

25. **Reibungsfreier Wagen** Ein kleiner reibungsfrei rollender Wagen, der mit einer Feder an der Wand angebracht ist (siehe nachfolgende Abbildung), wird 10 cm aus seiner Ruhelage ausgelenkt und zur Zeit $t = 0$ losgelassen. Innerhalb von 4 Sekunden rollt er in Richtung Wand und wieder zurück. Zur Zeit t ist sein Ort $s = 10 \cos \pi t$.



a. Was ist die Maximalgeschwindigkeit des Wagens? Wann bewegt sich der Wagen mit dieser Geschwindigkeit? Was ist dann der Betrag der Beschleunigung?

b. Wo befindet sich der Wagen, wenn der Betrag der Beschleunigung maximal ist? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Wagen dann?

26. **Abstand zwischen zwei Schiffen** Mittags befand sich Schiff A genau 12 nautische Meilen nördlich von Schiff B. Schiff A segelte mit 12 Knoten (nautische Meilen pro Stunde) nach Süden und behielt diese Geschwindigkeit den ganzen Tag bei. Schiff B segelte mit 8 Knoten nach Osten und behielt diese Geschwindigkeit den ganzen Tag bei.

a. Starten Sie die Zeitmessung mit $t = 0$ am Mittag und drücken Sie den Abstand s zwischen den Schiffen als Funktion von t aus.

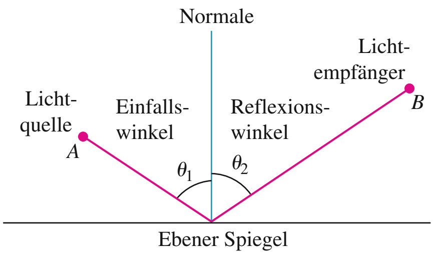
b. Wie schnell änderte sich der Abstand zwischen den Schiffen am Mittag? Wie verhielt es sich eine Stunde später?

c. Die Sichtweite war an diesem Tag 5 nautische Meilen. Waren die Schiffe jemals in Sichtweite?

d. Stellen Sie s und ds/dt als Funktionen von t für $-1 \leq t \leq 3$ grafisch dar, nach Möglichkeit mit verschiedenen Farben. Vergleichen Sie die Graphen und vergleichen Sie Ihre Beobachtungen mit Ihren Antworten aus **b.** und **c**.

e. Es scheint, als könnte der Graph von ds/dt im ersten Quadranten eine horizontale Asymptote haben. Dies legt wiederum die Vermutung nahe, dass ds/dt für $t \to \infty$ einen Grenzwert erreicht. Welcher Wert ist das? Wie ist das Verhältnis zu den Einzelgeschwindigkeiten der Schiffe?

27. **Das Fermat'sche Prinzip in der Optik** Licht aus einer Quelle A wird durch einen ebenen Spiegel in einen Empfänger im Punkt B reflektiert (▶die nachfolgende Abbildung). Zeigen Sie, dass der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel sein muss, wenn das Licht dem Fermat'schen Prinzip gehorcht. (Beide Winkel werden gegen die Normale über der Spiegelebene gemessen.) Dieses Ergebnis können Sie, wenn Sie mögen, auch ohne Analysis durch rein geometrische Überlegungen herleiten.



28. **Zinnpest** Wird Zinn bei einer Temperatur von unter 13,2 °C aufbewahrt, so wird es brüchig und zerbröselt zu einem grauen Pulver. Gegenstände aus Zinn zerbröseln irgendwann spontan zu diesem grauen Pulver, wenn sie jahrelang bei einem kalten Klima aufbewahrt werden. Die Europäer, die vor vielen Jahren den Zerfall von Orgelpfeifen aus Zinn in ihren Kirchen beobachteten, nannten den Zerfall *Zinnpest*, weil er ansteckend zu sein schien, was auch tatsächlich zutraf, denn das graue Pulver ist ein Katalysator seiner eigenen Bildung.

Ein *Katalysator* einer chemischen Reaktion ist eine Substanz, die die Reaktionsgeschwindigkeit steuert, ohne selbst einer permanenten Änderung zu unterliegen. Eine *autokatalytische Reaktion* ist eine Reaktion, deren Endprodukt als Katalysator dieser Reaktion wirkt. Eine solche Reaktion kann am Anfang langsam ablaufen, wenn die vorhandene Menge des Katalysators klein ist. Auch am Ende läuft sie langsam ab, wenn der überwiegende Teil der Ausgangssubstanz verbraucht ist. Dazwischen aber, wenn sowohl die Ausgangssubstanz als auch der Katalysator reichlich vorhanden sind, läuft die Reaktion in einem schnellen Tempo ab.

In einigen Fällen ist es plausibel anzunehmen, dass die Reaktionsgeschwindigkeit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ sowohl proportional zur vorliegenden Menge der Ausgangssubstanz als auch zur Menge des Reaktionsprodukts proportional ist. Das heißt, man kann v ausschließlich als Funktion von x betrachten. Es gilt

$$v = kx(a-x) = kax - kx^2$$

mit x = Menge des Reaktionsprodukts
a = Menge der Ausgangssubstanz
k = positive Konstante .

Für welchen Wert von x ist die Reaktionsgeschwindigkeit v maximal? Was ist der Maximalwert von v?

Handel und Wirtschaft

29. Es kostet Sie jeweils c Euro, einen Rucksack herzustellen und zu vertreiben. Werden die Rucksäcke für x Euro pro Stück verkauft, so ist die Anzahl der verkauften Rucksäcke gegeben durch

$$n = \frac{a}{x-c} + b(100-x)$$

mit den positiven Konstanten a und b. Welcher Verkaufspreis liefert den maximalen Gewinn?

30. **Wilson'sche Losformel** Eine der Formeln der Warenwirtschaft besagt, dass die mittleren wöchentlichen Kosten für Bestellung, Bezahlung und Aufbewahrung von Waren

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

betragen. Dabei ist q die Menge, die sie bestellen, wenn Dinge knapp werden (Schuhe, Radios, Besen oder was Ihnen sonst noch einfällt), k sind die Kosten für eine Bestellung (gleich, unabhängig wie oft sie bestellen), c sind die Kosten eines Stücks (eine Konstante), m ist die pro Woche verkaufte Stückzahl (eine Konstante), und h sind die wöchentlichen Lagerkosten pro Stück (eine Konstante, die Platz, Hilfsmittel, Versicherung und Betriebsschutz berücksichtigt).

a. Als Lagerleiter besteht Ihre Aufgabe darin, die Menge zu finden, die $A(q)$ minimiert. Welche Menge ist das? (Die Formel, die Sie erhalten, ist die *Wilson'sche Losformel*.)
b. Die Versandkosten hängen manchmal von der Bestellmenge ab. In diesem Fall ist es realistischer, k durch $k + bq$ zu ersetzen, das ist die Summe von k und einer Konstanten mal q. Was ist nun die wirtschaftlichste Bestellmenge?

31. Ihre Einnahmefunktion sei $r(x) = 6x$, und Ihre Kostenfunktion sei $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$. Zeigen Sie, dass Sie dann bestenfalls die Gewinnschwelle erreichen können (Einnahmen sind so groß wie die Kosten).

32. Sie sollen einen offenen, rechteckigen Behälter konstruieren, der eine quadratische Grundfläche und ein Fassungsvolumen von 6 m^3 hat. Das Material für die Grundfläche kostet 60 Euro pro m^2, das für die Seiten 40 Euro pro m^2. Welche Abmessungen liefern den kostengünstigsten Behälter. Was sind die minimalen Kosten?

Biologie

33. Empfindlichkeit gegenüber einem Medikament (*Fortsetzung von Aufgabe 33 in Abschnitt 3.3*) Bestimmen Sie die Medikamentenmenge, auf die der Körper am empfindlichsten reagiert, indem Sie den Wert M bestimmen, der die Ableitung $\mathrm{d}R/\mathrm{d}M$ maximiert. Dabei ist

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

mit einer Konstanten C.

Theorie und Beispiele

34. Eine Ungleichung für positive ganze Zahlen Seien a, b, c und d positive ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16 \quad \text{ist.}$$

35. Die Ableitung von $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ aus Beispiel 4.23.

a. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

eine wachsende Funktion von x ist.

b. Zeigen Sie, dass

$$g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

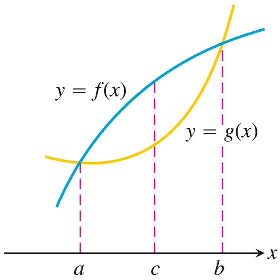
eine fallende Funktion von x ist.

c. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

eine wachsende Funktion von x ist.

36. Seien f und g die nachfolgend dargestellten differenzierbaren Funktionen. Die Stelle c ist die Stelle, an der der vertikale Abstand zwischen den Kurven am größten ist. Weisen die Tangenten an die beiden Kurven an der Stelle c eine Besonderheit auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

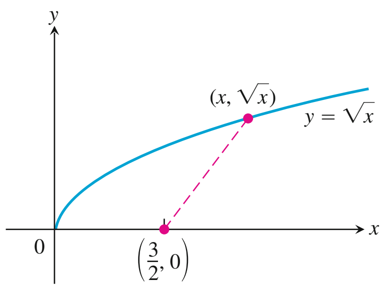


37. a. Die Funktion $y = \cot x - \sqrt{2}\operatorname{cosec} x$ hat auf dem Intervall $0 < x < \pi$ ein globales Maximum. Bestimmen Sie es.

b. Stellen Sie die Funktion grafisch dar, und vergleichen Sie Ihre Beobachtung mit Ihrer Antwort aus **a.**

38. a. Wie nah kommt die Kurve $y = \sqrt{x}$ dem Punkt $(3/2, 0)$? (*Hinweis*: Wenn Sie das *Quadrat* des Abstands minimieren, umgehen Sie die Wurzelausdrücke.)

b. Stellen sie die Abstandsfunktion $D(x)$ und $y = \sqrt{x}$ in einer Abbildung dar, und vergleichen Sie Ihre Beobachtung mit Ihrer Antwort aus **a.**



4.6 Das Newton-Verfahren

In diesem Abschnitt behandeln wir ein numerisches Verfahren, das man als *Newton-Verfahren* oder *Newton-Raphson-Verfahren* bezeichnet. Mit diesem Verfahren lässt sich eine *Nullstelle* einer (differenzierbaren) Funktion f, also eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, näherungsweise bestimmen. Dazu spielen Tangenten an den Graphen von f eine entscheidende Rolle.

Vorgehensweise beim Newton-Verfahren

Ziel des Newton-Verfahrens zur näherungsweisen Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ ist es, Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3, ... zu erzeugen, die der gesuchten Nullstelle x von f beliebig nahe kommen. In der Sprechweise von Kapitel 10 können wir auch sagen: Die mit dem Newton-Verfahren erzeugte Folge $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ konvergiert gegen x. Die erste Zahl x_0 wählen wir selbst aus, idealerweise liegt x_0 bereits in der Nähe von der Nullstelle x. Dann erledigt das Verfahren den Rest, indem es sukzessive x_1 aus x_0, x_2 aus x_1, x_3 aus x_2, ... allgemein x_{n+1} aus x_n bestimmt, und zwar so:

Zur Bestimmung von x_1 verwendet man die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$, also die Linearisierung von f bei x_0. Die Stelle, an der diese Tangente die x-Achse schneidet, ist x_1.

Zur Bestimmung von x_2 verwendet man die Tangente im Punkt $(x_1, f(x_1))$. Die Stelle, an der diese Tangente die x-Achse schneidet, ist x_2, usw. (▶Abbildung 4.41).

Idealerweise kommt man mit den so konstruierten Zahlen immer näher an die gesuchte Nullstelle von f heran. Man bricht das Verfahren ab und verwendet x_n als Näherungslösung von $f(x) = 0$, wenn zu einem vorher festgelegten (sehr kleinen) $\varepsilon > 0$ gilt $|f(x_n)| < \varepsilon$, oder, wenn sich x_{n+1} und x_n kaum mehr unterscheiden.

Eine Gleichung zur Erzeugung der aufeinanderfolgenden Näherungen können wir folgendermaßen herleiten: Ist die Näherung x_n gegeben, so ist die Punkt-Steigungsglei-

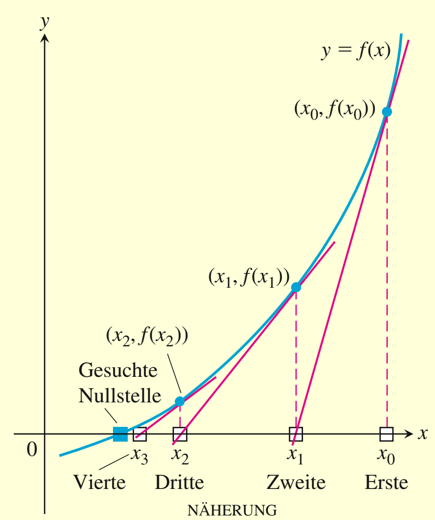


Abbildung 4.41 Das Newton-Verfahren beginnt mit einem geratenen Startwert x_0 und verbessert (im Idealfall) die Näherung in jedem Schritt.

chung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x_n, f(x_n))$

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)\,.$$

Wir können bestimmen, wo die Tangente die x-Achse schneidet, indem wir $y = 0$ setzen (▶Abbildung 4.42):

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \\ -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x - x_n \\ x &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{falls } f'(x_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Dieser Wert von x ist die nächste Näherung x_{n+1}. Hier ist das Schema des Newton-Verfahrens:

Merke

Newton-Verfahren

1. Wählen Sie eine erste Näherung x_0 für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Eine grafische Darstellung von $y = f(x)$ kann dabei hilfreich sein.

2. Verwenden Sie die erste Näherung, um eine zweite zu bestimmen, bestimmen Sie aus der zweiten eine dritte usw. Verwenden Sie dazu die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad \text{falls } f'(x_n) \neq 0\,. \tag{4.6}$$

Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von einer **rekursiven Definition**; (4.6) gibt an, wie sich x_{n+1} aus x_n berechnet.

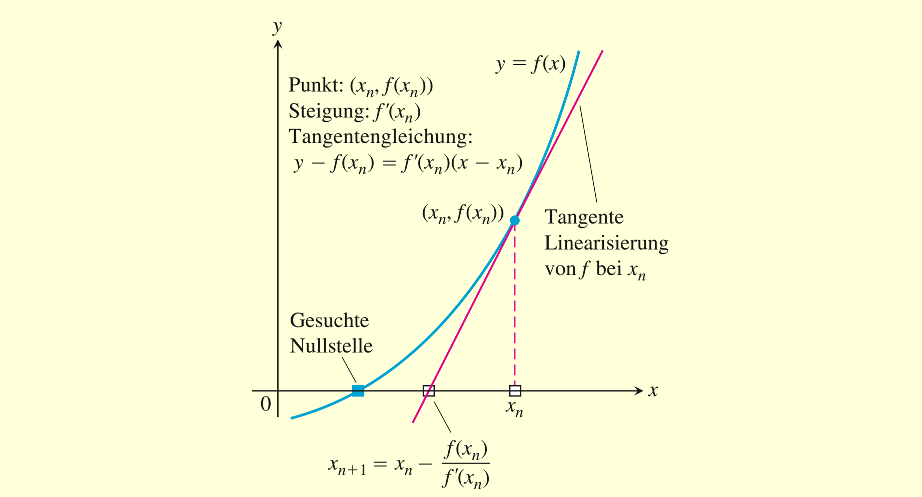


Abbildung 4.42 Die Veranschaulichung der aufeinanderfolgenden Schritte des Newton-Verfahrens. Von x_n aus gehen wir zu dem zugehörigen Punkt auf der Kurve und folgen dann der Tangente an die Kurve in diesem Punkt bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse, um x_{n+1} zu bekommen.

Das Newton-Verfahren anwenden

Anwendungen des Newton-Verfahrens gehen in der Regel mit vielen numerischen Berechnungen einher, sodass sie sich für Computer oder Taschenrechner sehr eignen. Doch selbst wenn man die Berechnungen per Hand ausführt (was sehr mühsam sein kann), bildet das Verfahren ein leistungsfähiges Werkzeug zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen.

In unserem ersten Beispiel bestimmen wir Dezimalnäherungen von $\sqrt{2}$, indem wir die positive Nullstelle der Gleichung $f(x) = x^2 - 2 = 0$ näherungsweise bestimmen.

Dezimalnäherung von $\sqrt{2}$

Beispiel 4.25 Bestimmen Sie die positive Nullstelle der Gleichung

$$f(x) = x^2 - 2 = 0\,.$$

Lösung Mit $f(x) = x^2 - 2$ und $f'(x) = 2x$ wird Gleichung (4.6) zu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

ermöglicht es uns, mit nur ein paar Tastendrücken von einer Näherung zur nächsten zu kommen. Mit dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten wir die Ergebnisse in der ersten Spalte der folgenden Tabelle. (Auf fünf Dezimalstellen genau ist $\sqrt{2} = 1{,}41421$.)

	Fehler	Anzahl der korrekten Stellen
$x_0 = 1$	$-0{,}41421$	1
$x_1 = 1{,}5$	0,08579	1
$x_2 = 1{,}41667$	0,00246	3
$x_3 = 1{,}41422$	0,00001	5

■

Das Newton-Verfahren ist das Verfahren, das die meisten Taschenrechner zur Nullstellenberechnung verwenden, weil es sehr schnell konvergiert. Wären die Rechnungen in der Tabelle aus Beispiel 4.25 nicht nur auf 5, sondern auf 13 Stellen genau ausgeführt worden, dann hätten wir $\sqrt{2}$ schon nach einem einzigen weiteren Schritt auf mehr als 10 Stellen genau bestimmt.

Schnittpunkt von $y = x^3 - x$ mit der Horizontalen $y = 1$

Beispiel 4.26 Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem die Kurve $y = x^3 - x$ die horizontale Gerade $y = 1$ schneidet.

Lösung Die Kurve schneidet die Gerade für $x^3 - x = 1$ bzw. $x^3 - x - 1 = 0$. Wann ist $f(x) = x^3 - x - 1$ gleich null? Wegen $f(1) = -1$ und $f(2) = 5$ wissen wir aus dem Zwischenwertsatz, dass es im Intervall $(1, 2)$ eine Nullstelle gibt (▶Abbildung 4.43).

Wir wenden nun das Newton-Verfahren auf f an, mit dem Startwert $x_0 = 1$. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 und ▶Abbildung 4.44 dargestellt.

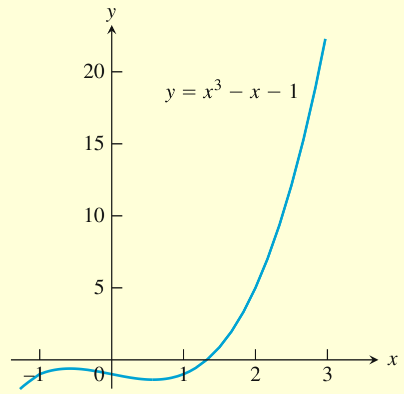


Abbildung 4.43 Der Graph von $f(x) = x^3 - x - 1$ schneidet die x-Achse einmal; dies ist die von uns gesuchte Nullstelle (Beispiel 4.26).

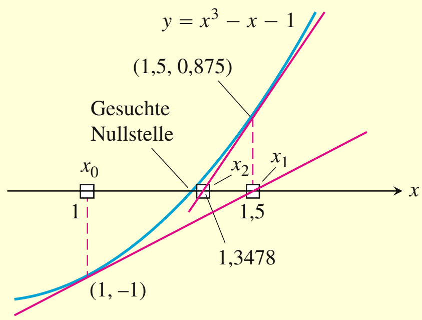


Abbildung 4.44 Die ersten drei x-Werte aus Tabelle 4.1.

Wir sehen, dass sich x_5 und x_6 in den ersten neun Dezimalstellen nicht mehr unterscheiden und verwenden x_5 (oder auch x_6) als Näherungslösung von $f(x) = 0$. In der Tat ist $|f(x_5)| < 2 \cdot 10^{-13}$, also $f(x_5) \approx 0$. Damit haben wir eine Lösung von $f(x) = 0$ auf neun Dezimalstellen genau bestimmt.

In ►Abbildung 4.45 sehen wir, dass das Verfahren in Beispiel 4.26 auch mit $x_0 = 3$ hätte starten können. Der Punkt $B_1(3, 23)$ ist ziemlich weit von der x-Achse entfernt, aber die Tangente an B_0 schneidet die x-Achse bei etwa $(2{,}12, 0)$, sodass $x_1 = 2{,}12$ trotzdem eine Verbesserung gegenüber x_0 ist. Wenden wir wie vorhin Gleichung (4.6) mit $f(x) = x^3 - x - 1$ und $f'(x) = 3x^2 - 1$ immer wieder an, erhalten wir die neunstellige Näherungslösung $x_6 = 1{,}324717957$ nach sechs Schritten.

Tabelle 4.1: Die Ergebnisse des Newton-Verfahrens für $f(x) = x^3 - x - 1$ mit $x_0 = 1$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,347826087
2	1,347826087	0,100682173	4,449905482	1,325200399
3	1,325200399	0,002058362	4,268468292	1,324718174
4	1,324718174	0,000000924	4,264634722	1,324717957
5	1,324717957	$-1{,}8672 \cdot 10^{-13}$	4,264632999	1,324717957