WWW.PEARSON-STUDIUM.DE
CWS
COMPANION WEBSITE

Russell C. Hibbeler

# Technische Mechanik 3
# Dynamik

12., aktualisierte Auflage

ALWAYS LEARNING

PEARSON

***Energieerhaltung*** Die maximale Längenänderung $s_3$ des Seiles wird durch erneute Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf den Ball nach dem Zusammenstoß bestimmt. Mit $y = -y_3 = -(l + s_3)$, Abbildung 4.19c, erhält man

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\frac{1}{2} m_B (v_B)_2^2 + 0 = 0 - m_B g h + \frac{1}{2} c s_3^2$$

$$\frac{1}{2} m_B (v_B)_2^2 + 0 = 0 - m_B g (l + s_3) + \frac{1}{2} c s_3^2$$

$$\frac{1}{2} c s_3^2 - m_B g s_3 - m_B g l - \frac{1}{2} m_B (v_B)_2^2 = 0$$

Wir lösen die quadratische Gleichung und nehmen die positive Wurzel:

$$s_3 = 0{,}237 \text{ m} = 237 \text{ mm}$$

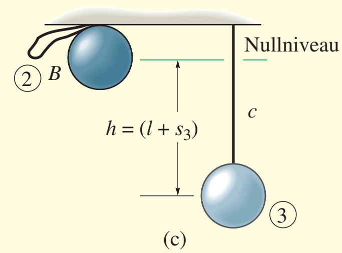


**Abbildung 4.19**

**Beispiel 4.13** Zwei glatte Kreisscheiben $A$ und $B$ der Masse $m_A$ bzw. $m_B$, siehe Abbildung 4.20a, stoßen mit den Geschwindigkeiten $(v_A)_1$ bzw. $(v_B)_1$ zusammen. Bestimmen Sie für den gegebenen Restitutionskoeffizienten $e$ die $x$- und $y$-Koordinaten der Endgeschwindigkeiten der beiden Scheiben kurz nach dem Zusammenstoß.

$m_A = 1$ kg, $m_B = 2$ kg, $(v_A)_1 = 3$ m/s, $(v_B)_1 = 1$ m/s, $e = 0{,}75$, $\theta_1 = 30°$, $\phi_1 = 45°$

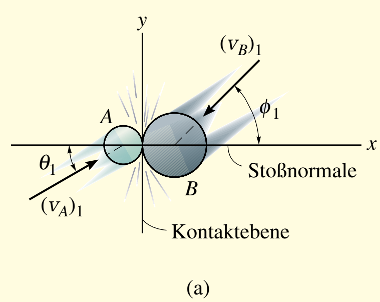


**Abbildung 4.20**

## Lösung

Es handelt sich um einen *schiefen, zentralen Stoß*. Warum? Zur Lösung legen wir die $x$-Achse auf die Stoßnormale und die $y$-Achse in die Kontaktebene, Abbildung 4.20a. Wir zerlegen die Anfangsgeschwindigkeiten in ihre $x$- und $y$-Komponenten und erhalten koordinatenweise

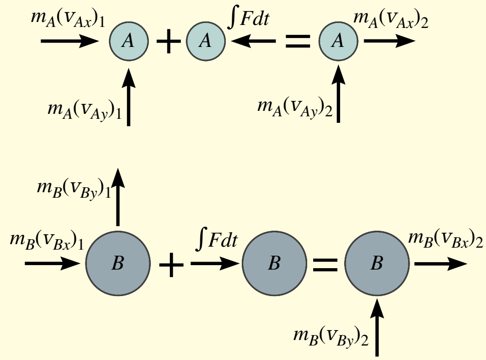
$$(v_{Ax})_1 = (v_A)_1 \cos\theta_1 = 2{,}60 \text{ m/s}$$

$$(v_{Ay})_1 = (v_A)_1 \sin\theta_1 = 1{,}50 \text{ m/s}$$

$$(v_{Bx})_1 = -(v_B)_1 \cos\phi_1 = -0{,}707 \text{ m/s}$$

$$(v_{By})_1 = -(v_B)_1 \sin\phi_1 = -0{,}707 \text{ m/s}$$

Es wird angenommen, dass die vier unbekannten Geschwindigkeitskoordinaten nach dem Zusammenstoß jeweils in positive Koordinatenrichtung weisen, Abbildung 4.20b.




(b)

**Abbildung 4.20**

***Erhaltung des Impulses in $x$-Richtung*** Unter Bezugnahme auf die Impuls- und die Kraftstoßdiagramme schreiben wir

$$m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2 \qquad (1)$$

***Restitutionskoeffizient (bezüglich $x$-Richtung)*** Die *angenommene* Richtung der Geschwindigkeitskoordinaten beider Scheiben nach dem Zusammenstoß ist die positive $x$-Richtung, siehe Abbildung 4.20b:

$$e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}$$

$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = e[(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1] \qquad (2)$$

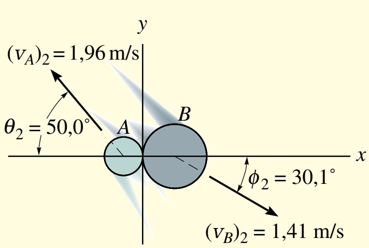
Wir lösen die Gleichungen (1) und (2) und erhalten

$$(v_{Ax})_2 = [m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 - em_B((v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1)]/(m_A + m_B)$$
$$= -1{,}26 \text{ m/s}$$

$$(v_{Bx})_2 = [m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 + em_A((v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1)]/(m_A + m_B)$$
$$= 1{,}22 \text{ m/s}.$$

***Erhaltung des Impulses in $y$-Richtung*** Der Gesamtimpuls *jeder der beiden Scheiben* bleibt in $y$-Richtung (entlang der Kontaktebene) *erhalten*, denn die Scheiben sind glatt und daher wirkt *kein* äußerer Kraftstoß in dieser Richtung. Gemäß Abbildung 4.20b gilt

$$m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2$$
$$(v_{Ay})_2 = 1{,}50 \text{ m/s}$$
$$m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2$$
$$(v_{By})_2 = -0{,}707 \text{ m/s}.$$




(c)

Zeigen Sie, dass die resultierenden Geschwindigkeitsbeträge gleich den Ergebnissen in Abbildung 4.20c sind.

## 4.5 Drehimpuls

Der *Drehimpuls* oder *Drall* $\mathbf{H}_O$ *eines Massenpunktes* bezüglich eines Bezugspunktes $O$ ist definiert als das „Moment" des Impulses des Massenpunktes bezüglich $O$. Dieser Begriff ist analog dem Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes. Daher heißt der Drehimpuls $\mathbf{H}_O$ auch *Impulsmoment*.

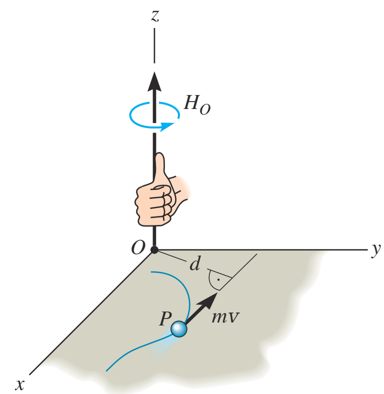


Abbildung 4.21

**Skalare Schreibweise** Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer gekrümmten Bahn in der $x$-$y$-Ebene, Abbildung 4.21, kann der Drehimpuls zu einem beliebigen Zeitpunkt um Punkt $O$ (d.h. um die $z$-Achse) skalar bestimmt werden. Der *Betrag* von $\mathbf{H}_O$ ist

$$(H_O)_z = (d)(mv) \tag{4.13}$$

worin $d$ der Hebelarm, d.h. der senkrechte Abstand von $O$ zur Wirkungslinie von $m\mathbf{v}$ ist. Die SI-Einheit von $(H_O)_z$ ist kg·m²/s. Die *Richtung* von $\mathbf{H}_O$ wird mittels der Rechte-Hand-Regel bestimmt. Wie in Technische Mechanik – Band 1 erläutert, zeigt die Krümmung der Finger der rechten Hand den Drehsinn von $m\mathbf{v}$ um $O$ an. In diesem Fall steht der Daumen senkrecht auf der $x$-$y$-Ebene und zeigt entlang der $+z$-Achse.

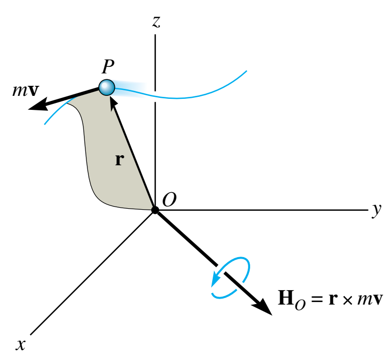


Abbildung 4.22

**Vektorschreibweise** Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer gekrümmten Bahn im Raum, Abbildung 4.22, dann ist eine unmittelbare skalare Auswertung (in Koordinaten) schwierig und man stellt eine vektorielle Darstellung des Drehimpulses um $O$ unter Verwendung des Kreuzproduktes an den Anfang:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{4.14}$$

$\mathbf{r}$ ist der Ortsvektor vom Koordinatenursprung $O$ zum Massenpunkt $P$. Wie dargestellt steht $\mathbf{H}_O$ senkrecht auf der grau unterlegten Ebene, in der $\mathbf{r}$ und $m\mathbf{v}$ liegen.

Zur Auswertung des Kreuzproduktes werden $\mathbf{r}$ und $m\mathbf{v}$ in kartesischen Koordinaten geschrieben und der Drehimpuls durch Berechnung der Determinante

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

bestimmt.

## 4.6 Drehimpulssatz

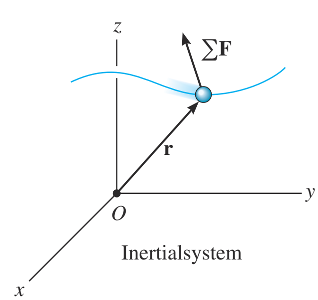


Abbildung 4.23

Die Momente aller äußeren Kräfte auf den Massenpunkt in Abbildung 4.23 um Punkt $O$ sollen mit dem Impulsmoment $\mathbf{H}_O$ bezüglich desselben Punktes in Beziehung gesetzt werden. Ausgangspunkt ist das Newton'sche Grundgesetz

$$\sum \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$

Dazu bildet man das Kreuzprodukt beider Seiten des Newton'schen Grundgesetzes (von links) mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$. Linksseitig ergibt sich das resultierende Moment $\sum \mathbf{M}_O$ aller Kräfte bezüglich des genannten Punktes $O$, und insgesamt erhalten wir

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

Gemäß *Anhang C* kann der Differenzialquotient des Impulsmomentes $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ mittels Produktregel als

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

geschrieben werden. Der erste Term auf der rechten Seite dieser Beziehung verschwindet, denn es gilt $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$, weil das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst null ist. Das Moment von $m\dot{\mathbf{v}}$ auf der rechten Seite der eingangs formulierten Gleichung kann demnach als Zeitableitung des Drehimpulses geschrieben werden, $\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{H}}_O$, sodass sich insgesamt

$$\boxed{\sum \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \tag{4.16}$$

ergibt. Diese Gleichung besagt, dass *das resultierende Moment aller auf einen Massenpunkt während seiner Bewegung einwirkenden Kräfte bezüglich eines frei wählbaren Punktes O gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses des Massenpunktes bezüglich dieses Punktes ist*. Die Aussage wird als *Drehimpulsatz* oder *Drallsatz in differenzieller Form* bezeichnet und ist ganz ähnlich dem Ergebnis

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}} \tag{4.17}$$

gemäß Gleichung (4.1) unter expliziter Verwendung des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$: *Die resultierende Kraft auf einen Massenpunkt während seiner Bewegung ist gleich der Änderung des Impulses des Massenpunktes.*

Aus den Herleitungen wird klar, dass sowohl Gleichung (4.17) als auch Gleichung (4.16) eine andere Schreibweise für das Newton'sche Grundgesetz sind. Bei der Betrachtung einzelner Massenpunkte werden keinerlei Zusatzinformationen über das Newton'sche Grundgesetz hinaus verwendet, es handelt sich eineindeutig um äquivalente Aussagen, die nur durch mathematische Äquivalenzoperationen ein anderes Aussehen angenommen haben. In weiteren Abschnitten des Buches wird gezeigt, dass für Massenpunktsysteme und starre Körper der Drallsatz eine weitergehende Aussage als das Newton'sche Grundgesetz darstellt und als weiteres Axiom zum Newton'schen Grundgesetz (d.h. dem Schwerpunktsatz) hinzutritt.

**Beispiel 4.14** Die Kiste in Abbildung 4.24a hat die Masse $m$, gleitet reibungsfrei die kreisförmige Rampe hinunter und erreicht beim Winkel $\theta$ die Geschwindigkeit $v$. Bestimmen Sie in dieser Position ihren Drehimpuls bezüglich des Punktes $O$ und ihre Beschleunigung $a_t$.

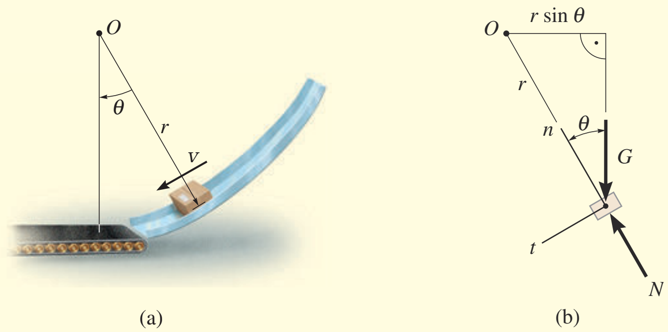



Abbildung 4.24

## Lösung

Da $v$ tangential zur Bahnkurve verläuft, ergibt sich gemäß Gleichung (4.13) für den Drehimpuls

$$H_O = rmv$$

Die Beschleunigung $(dv/dt)$ wird mit Gleichung (4.16) bestimmt. Dem Freikörperbild der Kiste in Abbildung 4.24b ist zu entnehmen, dass nur das Gewicht $G = mg$ ein Moment bezüglich $O$ bewirkt:

$$\sum M_O = \dot{H}_O; \quad mg(r\sin\theta) = \frac{d}{dt}(rmv)$$

Da $r$ und $m$ konstant sind, erhalten wir

$$mgr\sin\theta = rm\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

Auf das gleiche Ergebnis führt natürlich auch die direkte Anwendung des Newton'schen Grundgesetzes in tangentialer Richtung, siehe Abbildung 4.24b:

$$\sum F_t = ma_t; \quad mg\sin\theta = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

**Beispiel 4.15**

Das Auto mit der Masse $m$ fährt auf der in Abbildung 4.25a gezeigten kreisförmigen Straße. Die Räder übertragen eine Zugkraft von $F = kt^2$ auf die Straße. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Autos bei $t = t_1$. Die Anfangsgeschwindigkeit des Autos beträgt $v(t=0) = v_0$. Vernachlässigen Sie die Größe des Autos.

$k = 150\ \mathrm{N/s^2}$, $t_1 = 5\ \mathrm{s}$, $v_0 = 5\ \mathrm{m/s}$

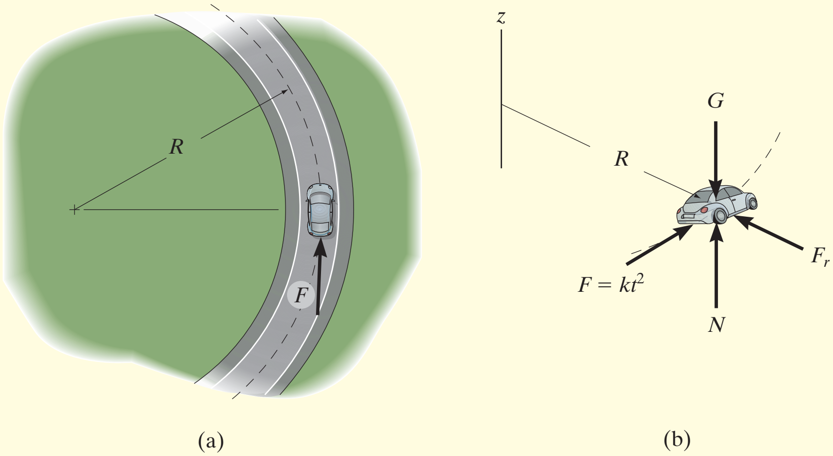



**Abbildung 4.25**

## Lösung

***Freikörperbild*** Abbildung 4.25b zeigt das Freikörperbild des Autos. Wenn wir den Drehimpulssatz um die $z$-Achse anwenden, lassen sich der vom Gewicht erzeugte Drehimpuls, die Normalkraft und die radiale Reibungskraft eliminieren, da sie parallel zur Achse wirken oder hindurchgehen.

***Drehimpulssatz in integraler Form***

$$(H_z)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_z dt = (H_z)_2$$

$$Rm\, v_1 + \int_{t_1}^{t_2} RFdt = Rm\, v_2$$

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{m}\int_1^2 Fdt = v_1 + \frac{1}{m}\int_1^2 kt^2 dt$$

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{3m}kt^3\Big|_1^2 = v_0 + \frac{1}{3m}kt_1^3$$

$$v_2 = 9{,}17\ \mathrm{m/s}$$

Wie bereits der Impulssatz in integraler Form gemäß Gleichung (4.2), (4.3) bzw. (4.4) aus der Formulierung gemäß Gleichung (4.1) bzw. (4.17) in differenzieller Form durch Zeitintegration folgte, kann eine derartige Rechnung auch auf den Drallsatz in differenzieller Form gemäß Gleichung (4.16) angewendet werden. Wird er in der Form $\sum \mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$ geschrieben und integriert, erhält man nämlich unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = t_1$ der Drehimpuls $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$ genannt wird und zum Zeitpunkt $t = t_2$ entsprechend $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$ ist,

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

oder

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{4.18}$$

Dies ist die integrale Form des *Drehimpulssatzes*. Die Anfangs- und Enddrehimpulse $(\mathbf{H}_O)_1$ und $(\mathbf{H}_O)_2$ sind definiert als Moment des Impulses des Massenpunktes $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$ zu den Zeitpunkten $t_1$ bzw. $t_2$. Der zweite Term $\sum \int \mathbf{M}_O \, dt$ auf der linken Seite wird als Momentenstoß (oder ebenfalls als *Drehimpuls*) bezeichnet. Er wird durch Zeitintegration des resultierenden Moments aller auf den Massenpunkt im Zeitraum von $t_1$ bis $t_2$ einwirkenden Kräfte bestimmt und wegen $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ damit in vektorieller Form

$$\text{Momentenstoß} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt \tag{4.19}$$

geschrieben. Der Ortsvektor $\mathbf{r}$ geht dabei vom Bezugspunkt $O$ zu einem Punkt auf der Wirkungslinie von $\mathbf{F}$.

**Vektorielle Schreibweise** Mit dem Impuls- und Drehimpulssatz (in integraler Form) können also zwei Gleichungen angegeben werden, die die Bewegung des Massenpunktes beschreiben, nämlich in vektorieller Formulierung die Gleichungen (4.3) und (4.18):

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt &= m\mathbf{v}_2 \\ (\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt &= (\mathbf{H}_O)_2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

**Skalare Schreibweise** Im Allgemeinen können diese Gleichungen in beliebigen Koordinatensystemen ausgewertet werden, z.B. in einem kartesischen $x,y,z$-Koordinatensystem. Somit ergeben sich bei allgemein räumlicher Bewegung zwei mal drei skalare Gleichungen. Ist die Bewegung des Massenpunktes auf die $x$-$y$-Ebene beschränkt, können zur Beschreibung dieser Bewegung $2 + 1 = 3$ skalare Gleichungen angeschrieben werden, nämlich

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_y)_2 \\ (H_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O dt &= (H_O)_2 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die ersten beiden Gleichungen repräsentieren den Impulssatz in der $x$- und $y$-Richtung aus *Abschnitt 4.1* und die dritte Gleichung spiegelt den Drehimpulssatz um die $z$-Achse wider.

**Drehimpulserhaltung** Sind die Momentenstöße eines Massenpunktes während der Zeitspanne von $t_1$ bis $t_2$ gleich null, vereinfacht sich die Gleichung (4.18) auf

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{4.22}$$

Diese Beziehung nennt man *Drehimpulserhaltungssatz* und bedeutet, dass der Drehimpuls während des Zeitraumes von $t_1$ bis $t_2$ sich nicht ändert, d.h. zu jedem Zeitpunkt konstant bleibt. Liegt kein äußerer Kraftstoß auf den Massenpunkt vor, bleiben Impuls und Drehimpuls erhalten. In bestimmten Fällen kann aber trotz fehlender Impulserhaltung der Drehimpuls erhalten bleiben. Ein Beispiel dafür ist ein Massenpunkt, an dem *nur* ein *zentrales Kräftesystem* angreift (*Abschnitt 2.8*). Wie in Abbildung 4.26 dargestellt, ist die resultierende Impulskraft $\mathbf{F}$ immer auf $O$ gerichtet, während sich der Massenpunkt auf der gekennzeichneten Bahnkurve bewegt. Der durch die Kraft $\mathbf{F}$ verursachte Momentenstoß auf den Massenpunkt um die $z$-Achse durch den Punkt $O$ ist immer null. Daher bleibt der Drehimpuls des Massenpunktes um diese Achse immer erhalten.

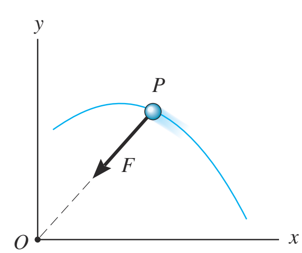
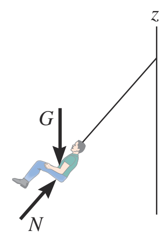



**Abbildung 4.26**

Es ist abschließend festzuhalten, dass bei der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter der Einwirkung von Kräften die Aussagen des Impuls- und des Drehimpulssatzes nicht voneinander unabhängig sind. Liegt eine Zentralbewegung vor, ist allerdings die Verwendung des Drehimpulssatzes besonders effizient, weil dieser dann in Form einer Drehimpulserhaltung bezüglich des Drehzentrums verwendet werden kann.




Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes bleibt der Drehimpuls der Fahrgäste eines Kettenkarussells um die Drehachse erhalten. Das Freikörperbild zeigt, dass die Wirkungslinie der Normalkraft $N$ des Sitzes auf den Fahrgast durch diese vertikale Achse geht und das Gewicht $G$ des Fahrgastes parallel dazu ist. Um die $z$-Achse wirkt demnach keinerlei Momentenstoß.

## Lösungsweg

Für die Anwendung der integralen Form des Drehimpulssatzes und des Drehimpulserhaltungssatzes für die Bewegung einzelner Massenpunkte wird der folgende Lösungsweg vorgeschlagen:

### *Freikörperbild*

- Zeichnen Sie ein Freikörperbild zur Ermittlung jener Achsen, bezüglich derer eine Drehimpulserhaltung auftritt. Dazu müssen die Momente aller Kräfte (oder der zugeordneten Kraftstöße) parallel zur betreffenden Achse sein oder durch diese Achse hindurchgehen, damit kein Momentenstoß während der betrachteten Zeitspanne von $t_1$ bis $t_2$ erzeugt werden kann.
- Legen Sie positive Koordinatenrichtungen fest, ermitteln Sie damit Betrag und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes und nehmen Sie die Richtung der gesuchten Endgeschwindigkeit konsistenterweise in positive Koordinatenrichtung an.
- Alternativ können Sie auch Momentenstoß- und Drehimpulsdiagramme für den Massenpunkt zeichnen.

### *Impulsgleichungen*

- Wenden Sie den Drehimpulssatz

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

oder gegebenenfalls den Drehimpulserhaltungssatz $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$ an.

**Beispiel 4.16**

Der Klotz vernachlässigbarer Größe ruht auf einer glatten horizontalen Ebene, siehe Abbildung 4.27a. Er ist in $A$ an einem schlanken Rundstab vernachlässigbarer Masse befestigt, dieser wiederum an einem Drehgelenk in $B$. Es wird das Moment $M$ auf den Rundstab und die Kraft $P$ auf den Klotz aufgebracht. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Klotzes, die er aus der Ruhe heraus, bei $t = 0$, nach der Zeit $t = t_1$ erreicht.

$M = ct$, $P = 10\ \mathrm{N}$, $c = 3\ \mathrm{Nm/s}$, $r_{AB} = 0{,}4\ \mathrm{m}$, $m = 5\ \mathrm{kg}$, $t_1 = 4\ \mathrm{s}$

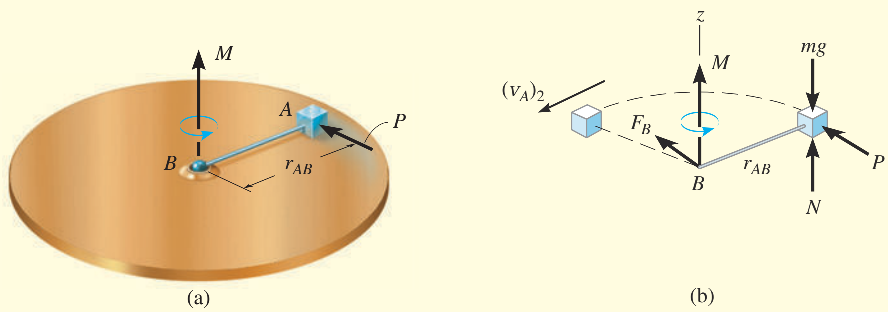



**Abbildung 4.27**

## Lösung

***Freikörperbild*** Wir betrachten das System aus Rundstab und Klotz, Abbildung 4.27b. Die resultierende Reaktionskraft $F_B$ im Drehgelenk fällt dann aus der Betrachtung heraus, wenn der Drehimpulssatz um die $z$-Achse angewendet wird. Dann fallen auch die vom Gewicht $G$ und der Normalkraft $N$ erzeugten Momentenstöße ebenfalls heraus, denn ihre Wirkungslinien verlaufen parallel zur $z$-Achse und liefern keine Wirkung bezüglich dieser Achse.

***Drehimpulssatz in integraler Form***

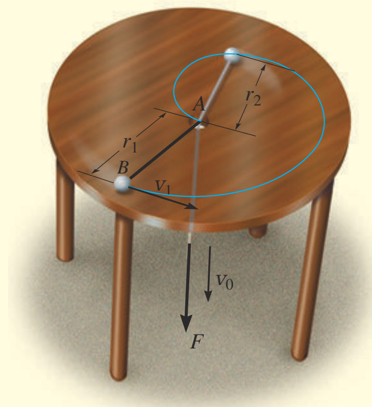
$$(H_z)_0 + \sum \int_0^{t_1} M_{Bz} dt = (H_z)_1$$

$$0 + \int_0^{t_1} \left(ct + r_{AB} P\right) dt = m\left(v_A\right)_1 r_{AB}$$

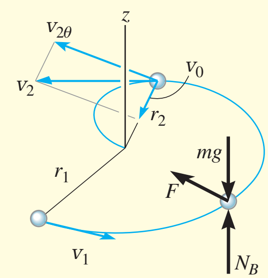
$$\left(v_A\right)_1 = \frac{c}{2mr_{AB}} t_1^2 + \frac{P}{m} t_1 = 20\ \mathrm{m/s}$$

**Beispiel 4.17** Der Ball $B$ in Abbildung 4.28a ist an einem masselosen, undehnbaren Seil befestigt, das durch ein Loch in $A$ im horizontalen, glatten Tisch geht. In der Entfernung $r_1$ vom Loch dreht sich der Ball mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1$ auf dem Tisch im Kreis. Durch die Kraft $F$ wird das Seilende mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0$ vertikal nach unten gezogen. Bestimmen Sie (a) die Geschwindigkeit des Balles, wenn sein Bahnradius den Wert $r = r_2$ erreicht, und (b) die von $F$ geleistete Arbeit beim Verkürzen des Radius von $r_1$ auf $r_2$. Vernachlässigen Sie die Größe des Balles.

$m = 0{,}4$ kg, $r_1 = 0{,}5$ m, $r_2 = 0{,}2$ m, $v_1 = 1{,}2$ m/s, $v_0 = 2$ m/s




(a)




(b)

**Abbildung 4.28**

## Lösung

### Teilaufgabe a)

***Freikörperbild*** Während der Ball seinen Bahnradius von $r_1$ nach $r_2$ verringert, Abbildung 4.28b, verläuft die Wirkungslinie der Kraft $F$ immer durch die vertikale $z$-Achse und die des Gewichtes $G$ sowie der Normalkraft $N$ parallel dazu. Somit sind die Momente bzw. die Momentenstöße dieser Kräfte um diese Achse gleich *null*. Es gilt also bezüglich der $z$-Achse der Drehimpulserhaltungssatz.

***Drehimpulserhaltung*** Die Geschwindigkeit $v_2$ des Balles zum Zeitpunkt $t = t_2$ wird in ihre beiden Komponenten in radiale Richtung $v_{2r}$ zum Zentrum $A$ und senkrecht dazu ($v_{2\theta}$) zerlegt. Der radiale Anteil ist bekannt, $v_{2r} = v_0$, ruft aber um die $z$-Achse keinen Drehimpuls hervor. Deshalb verbleibt bei Anwendung des Drehimpulserhaltungssatzes um die $z$-Achse die Aussage

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_{2\theta}$$

$$v_{2\theta} = (r_1/r_2)\, v_1 = 3 \text{ m/s}$$

Die resultierende Geschwindigkeit $v_2$ des Balles ist somit

$$v_2 = \sqrt{(v_{2r})^2 + (v_{2\theta})^2} = 3{,}606 \text{ m/s}$$

### Teilaufgabe b)

Die einzige relevante Kraft ist $F$ (Normalkraft und Gewicht stehen senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Balles auf der horizontalen Unterlage). Die kinetische Energie des Balles am Anfang und am Ende können angegeben werden, sodass aus dem Arbeitssatz für das System aus Seil und Ball

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + W_F = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$W_F = 2{,}312 \text{ J}$$

folgt.