Theo de Jong

Analysis

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Theo de Jong

Analysis

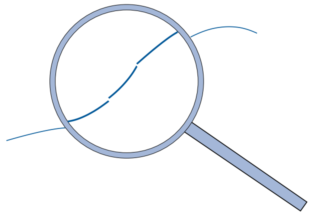
in einer Veränderlichen

PEARSON

Higher Education
München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney
a part of Pearson plc worldwide

Der Spezialfall, dass (a_n) und (b_n) wachsende Folgen positiver reellen Zahlen sind, war bereits in Satz 1.4 bewiesen worden. Der Beweis dieser Rechenregeln im allgemeinen Fall gibt *keinen neuen Beweis* für Satz 1.4. Der in diesem Kapitel angegebene Beweis benutzt nämlich die Grundrechenregeln für die reellen Zahlen, wie die Assoziativität und die Distributivität. Jedoch war eben dieser Satz 1.4 ein wesentlicher Schritt in dem Beweis der grundlegenden Rechenregeln.

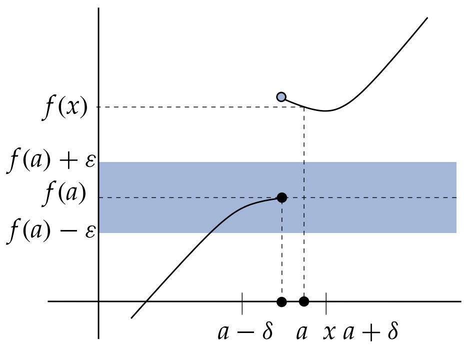
Kommen wir zu dem Begriff „Stetigkeit einer Funktion". In der Schule wird dieser Begriff oft umschrieben mit der Phrase:



> *Die Funktion f ist stetig, wenn der Graph der Funktion gezeichnet werden kann, ohne den Bleistift vom Papier zu nehmen.*

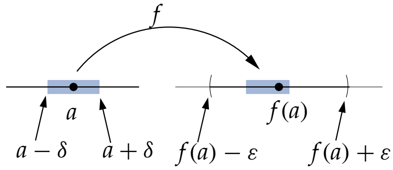
Wir erwarten von vielen bekannten Funktionen, dass sie stetig sind, wie z. B. die Funktion $f(x) = x^3 - x - 1$. Es sieht tatsächlich aus, als ob der Graph ohne Sprünge verläuft. Können wir uns aber so sicher sein? Wenn wir einen Graph mit einer Lupe oder einem Mikroskop betrachten, wie können wir sicher sein, dass der Graph im Kleinen keine Sprünge macht, so wie im nebenstehenden Bild dargestellt?

In der nebenstehenden Figur ist der Graph einer Funktion gezeichnet, welche in $x = a$ nicht stetig ist. Der Graph macht bei $x = a$ einen Sprung. Die Funktionswerte $f(x)$ für x nahe bei a sollten nicht viel von dem Wert $f(a)$ abweichen. Die Annäherung sollte besser sein, wenn x näher bei a ist. Diese Tatsache beschreiben wir mathematisch folgendermaßen:



> *Die Funktion f ist stetig in a, wenn es für jede Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt, mit $f(x) \in V$ für jedes $x \in U$.*

Da jede Umgebung von $f(a)$ eine Umgebung der Form $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ enthält, und weil es ausreicht, eine Umgebung der Form $U = (a - \delta, a + \delta)$ zu finden, lässt sich die Stetigkeit in a durch folgenden Satz beschreiben.



> *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

In den obigen Abbildungen ist versucht worden, die Definition von Stetigkeit bildlich darzustellen. Ein 100% korrektes Bild kann nicht gezeichnet werden, da die Stetigkeit ein dynamischer Prozess ist: Zuerst wird ein beliebiges ε gewählt und danach müssen wir ein δ finden.

Diese Reihenfolge ist schwer in einem Bild zu vermitteln.

Die Stetigkeit ist äquivalent zur Folgenstetigkeit. Die Folgenstetigkeit in a wird beschrieben durch die einprägsame Formel

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

für jede konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a. Es ist bequem, die verschiedenen Formulierungen von Stetigkeit nebeneinander zu benutzen. Die Folgenstetigkeit erlaubt es uns nämlich, die Rechenregeln für stetige Funktionen sofort herzuleiten, weil sie aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen folgen.

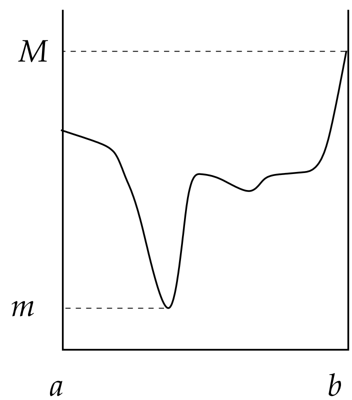
Der Zwischenwertsatz zeigt uns, dass die Graphen von stetigen Funktionen tatsächlich keine Sprünge haben.

> *Ist f stetig und $f(a) < c < f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.*

Glücklicherweise ist der Beweis konstruktiv: Sobald man in der Lage ist, Funktionswerte $f(x)$ auszurechnen (oder besser noch: wenn man entscheiden kann, ob $f(x) < c$ oder $f(x) > c$), lässt sich die Binärentwicklung oder die Dezimalentwicklung einer solchen Zahl ξ bestimmen. Insbesondere kann man hierdurch oft die Nullstellen von f finden, also diejenigen ξ, für die gilt: $f(\xi) = 0$. Ehrlichkeitshalber muss man dazu sagen, dass die vorgestellte Methode langsam ist, dafür aber leicht zu verstehen. Wenn die Differenzialrechnung zur Verfügung steht, werden wir bessere Methoden kennenlernen (Newtonsche Methode).

Ein weiterer Satz, welcher offensichtlich erscheint, ist folgender:

> *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so hat f auf $[a, b]$ ein Maximum M (und ein Minimum m).*



Das nebenstehende Bild illustriert diesen Satz. Dem Autor ist kein konstruktiver Beweis dieses Satzes bekannt. Wir können hier kein Verfahren angeben, welches dieses Maximum bestimmt. Für differenzierbare Funktionen, welche im nächsten Kapitel behandelt werden, sieht es besser aus. Mit ihrer Hilfe kann man mögliche Maximalwerte bestimmen.

Das nächste Thema ist der Grenzwert. Dieser Begriff ist leicht zu verstehen für stetige Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Die Definition lautet in etwa wie folgt: Ist a ein Häufungspunkt von A, so gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Wenn f nicht stetig ist, so suchen wir eine stetige Funktion mit $g(x) = f(x)$ für $x \neq a$. Es gilt dann $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a)$.

Mit dieser Definition lassen sich die Rechenregeln für Grenzwerte sofort aus denen für stetige Funktionen ableiten. Der Grenzwertbegriff kann auch wie nachfolgend beschrieben werden:

> $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *genau dann, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für jedes* $x \in A$ *mit* $0 < |x - a| < \delta$ *gilt:* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Wenn man $\lim_{x \to a} f(x) = b$ nachweisen möchte, so wird letztere Beschreibung oft benutzt.

Die Begriffe einseitiger Grenzwert $\lim_{x \nearrow a} f(x) = b$ und $\lim_{x \searrow a} f(x) = b$ können wir auf ähnliche Weise behandeln, so wie die Fälle $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \searrow a} f(x) = -\infty$.

In Abschnitt 3.8 behandeln wir die Exponentialfunktion a^x für $a > 0$ und in Abschnitt 3.9 die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ zur Basis $a > 0$. Diese sind zueinander inverse Funktionen, also

$$y = a^x \text{ genau dann, wenn } x = \log_a(y) .$$

Es reicht deshalb, entweder die Exponentialfunktion oder die Logarithmusfunktion zu definieren. Wir ziehen es vor, zuerst die Exponentialfunktion zu definieren. Die Definition hätten wir übrigens schon im ersten Kapitel geben können, allerdings wäre es schwerer gewesen, die Eigenschaften der Exponentialfunktion nachzuweisen.

Wegen $a^{-x} = 1/a^x$ und $(1/a)^x = a^{-x}$, reicht es aus, den Fall $x > 0$ und $a > 1$ zu betrachten. Ist n eine natürliche Zahl, so ist a^n natürlich nichts anderes als $\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$.

Wegen der bekannten Rechenregel $\sqrt{a^{2x}} = a^x$ gibt es nur eine Möglichkeit, a^x für endliche Binärentwicklung festzulegen. Sei $k \in N_0$ die kleinste Zahl mit $2^k x \in \mathbb{N}$. Ist $k = 0$, so ist $x \in \mathbb{N}$ und a^x schon definiert. Sonst ist $2^{k-1} 2x \in \mathbb{N}$, mit Induktion a^{2x} deshalb definiert und wir definieren dann a^x durch $a^x := \sqrt{a^{2x}}$.

Die Zahl a^x sollte natürlich gut angenähert werden durch $a^{\lfloor x \rfloor_n}$. Die Funktion a^x sollte stetig sein. Deshalb haben wir keine andere Wahl als zu definieren:

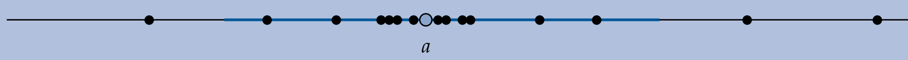
$$a^x := \lim_{n \to \infty} a^{\lfloor x \rfloor_n} .$$

An dieser Stelle müssen alle Rechenregeln für die Funktion a^x nachgerechnet werden. Die Stetigkeit von $\log_a(x)$ folgt dann aus der Tatsache, dass Umkehrfunktionen stetiger Funktionen stetig sind, siehe Abschnitt 3.7.

Am Ende des Kapitels betrachten wir noch Häufungspunkte und Cauchyfolgen.

3.1 Konvergente Folgen

Eine Folge $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$ reeller Zahlen heißt **konvergent** mit Grenzwert a, wenn für jede Umgebung V von a gilt, dass $a_n \in V$ für fast alle (d. h. bis auf endliche viele) natürliche Zahlen n. Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.



Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 nennt man eine **Nullfolge**. Eine nicht konvergente Folge nennt man **divergent.**

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt. Sind nämlich $a < b$ zwei Grenzwerte der Folge (a_n), so ist $V = (-\infty, \frac{a+b}{2})$ eine Umgebung von a und $W = (\frac{a+b}{2}, \infty)$ eine Umgebung von b. Nun kann a_n nicht gleichzeitig ein Element von V und von W sein. Da jede Umgebung von a eine Umgebung der Form $\{x\colon |x-a| < \varepsilon\}$ enthält, gilt:

Lemma 3.1 Eine Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

Satz 3.2

1 Eine wachsende (fallende) beschränkte Folge (a_n) ist konvergent.

2 Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b.

- **a.** $(a_n) + (b_n)$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.
- **b.** $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.
- **c.** Ist $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so ist (a_n/b_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$.

1 Sei $a = \sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, es folgt $a_n \leq a$. Für $\varepsilon > 0$ ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke, deshalb gibt es ein N mit $a_N > a - \varepsilon$ und für $n \geq N$: $a - \varepsilon < a_N \leq a_n < a + \varepsilon$.

2

- **a.** Wähle N_1 mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$ und $N \geq N_1$ mit $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $n \geq N$: $|(a_n + b_n) - (a+b) \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$.
- **b.** Sei $\varepsilon > 0$ und N_1, so dass $-2|b| < b_n < 2|b|$ für alle $n \geq N_1$, $N_2 \geq N_1$, so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon/(4|b|)$ für alle $n \geq N_1$, und $N \geq N_2$, so dass $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2(|a|)}$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $n \geq N$:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |(a_n - a)b_n| + |(b_n - b)a| < \frac{\varepsilon}{4|b|} 2|b| + \frac{\varepsilon}{2|a|}|a| < \varepsilon\,.$$

- **c.** Wir brauchen wegen b nur den Fall $a_n = 1$ zu zeigen. Es gibt ein N_1 mit $|b_n| > |b|/2$ für $n \geq N_1$, und wähle $N \geq N_1$ mit $|b_n - b| < \varepsilon \cdot b^2/2$. Dann gilt für $n \geq N$: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{bb_n} < \frac{\varepsilon b^2/2}{b^2/2} = \varepsilon$.

Aufgaben

COMPANION WEBSITE
Lösung

Aufgabe 3.1 Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert.

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 3. $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 4. $\left(\frac{1}{n^3-1}\right)$

5. $\left(\frac{3n+8}{5n-2}\right)$ 6. $\left(\frac{2n^2+2n+5}{6n^2+7n-1}\right)$ 7. $\left(\frac{n^2+7}{n^3}\right)$

Aufgabe 3.2

1. Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass sie beschränkt ist, d. h., es gibt ein K mit $|a_n| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
2. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \neq 0$ und $a_n \neq 0$ für alle n. Warum gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?
3. Finden Sie eine Nullfolge (a_n), so dass (a_n/a_{n+1}) nicht konvergiert.

Aufgabe 3.3

1. Bei einer konvergenten Folge spielt das Verhalten der ersten N Glieder überhaupt keine Rolle. Zeigen Sie deshalb: Ist (a_n) eine beschränkte Folge mit $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots$, so ist (a_n) konvergent. Ebenfalls für beschränkte Folgen mit $a_N \geq a_{N+1} \geq \cdots$.
2. Sei $0 < q < 1$ eine feste reelle Zahl. Begründen Sie, dass (q^n) eine konvergente Folge ist. Benutzen Sie den zweiten Teil der vorherigen Aufgabe, um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Zeigen Sie ebenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.
3. Sei $q > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie, dass $(q^n/n!)$ eine konvergente Folge ist mit Grenzwert 0.

Aufgabe 3.4 Sei $-1 < x < 1$ und $a_n = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-x}$. Warum ist diese Aussage vollkommen klar für $x = 1/2$?

Aufgabe 3.5 In dieser Aufgabe geben wir das Heron-Verfahren an, womit Sie sehr schnell gute Annäherungen von $\sqrt{a}$ finden können. (Diese Methode ist ein Spezialfall des Newton-Raphson-Verfahrens, siehe Satz 4.12 auf Seite 116.) Wir nehmen hier $a > 1$ und definieren eine Folge (x_n): Sei $x_1 = a$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + a/x_n)$.

1. Rechnen Sie nach: $(x_n - x_{n-1})^2 = x_n^2 - a$. Folgern Sie, dass $x_n^2 > a$.
2. Prüfen Sie, dass $x_1 > x_2 > x_3 \ldots > 1$. Folgern Sie, dass (x_n) konvergiert, und benutzen Sie Satz 3.2, 2b, um zu zeigen, dass der Grenzwert $\sqrt{a}$ ist.
3. Sei nun $a = 2$. Nehmen Sie ein geeignetes Computeralgebrasystem und berechnen Sie das kleinste n, so dass die ersten 100 Dezimalstellen von x_n mit denen von $\sqrt{2}$ übereinstimmen.
4. Benutzen Sie den ersten Teil der Aufgabe, um $x_n - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2$ zu zeigen. Erklären Sie, dass man hiermit schnell gute Annäherungen der Quadratwurzel von a berechnen kann.

3.2 Einschließungssatz, Divergenz gegen $\pm\infty$

Satz 3.3

1 Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \leq b_n$ für fast alle n (d. h. bis auf endlich viele n), so ist $a := \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n =: b$.

2 **(Einschließungssatz)** Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n, so ist auch (c_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

1 Wäre $a > b$, so betrachte $V := ((a+b)/2, \infty)$. $W = (-\infty, (a+b)/2)$. Dann $a_n \in V$ und $b_n \in W$ für fast alle n, also $b_n < a_n$ für fast alle n, Widerspruch! Also $a \leq b$.

2 Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a_n, b_n \in (a-\varepsilon, b-\varepsilon)$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n. Dann ist ebenfalls $c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle n. Die Aussage $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ folgt. ■

Beispiel: Es gilt $n! \geq 2^{n-1}$, siehe Aufgabe 1.6. Weil $a_n = 1 + 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1}$ für $x = 1/2$ gegen 3 konvergiert, folgt, dass (b_n) mit

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

eine wachsende Folge ist, welche gegen eine Zahl kleiner oder gleich 3 konvergiert.

Beispiel: Es sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen mit Grenzwert $a > 0$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Es gibt ein $K > 0$ mit $a_n > K$ für jedes n. Es gibt nämlich ein N, so dass $a_n \geq a/2$ für $n \geq N$. Man nimmt für K das Minimum der Zahlen $a_1, \ldots, a_{N-1}$ und $a/2$. Es gilt

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| < \frac{1}{K}\,|a_n - a| \; .$$

Es folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Diese Aussage gilt ebenfalls, wenn $a = 0$ und $a_n \geq 0$ ist. Wir überlassen dem Leser den Nachweis.

Die Folge (a_n) divergiert gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn für jede Zahl K gilt, dass $a_n > K$ (bzw. $a_n < K$) für fast alle n. Notation $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.6 Berechnen Sie, wenn möglich, nachfolgende Grenzwerte.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n^4+7}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \sqrt{n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2-1} - 2n\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{4n^2-1} - 3n\right)$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$ für $x \in \mathbb{R}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n+1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\alpha\pi)$ (α rational)

Aufgabe 3.7

1. Sei $a > 0$, $a_1 = a$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$. Warum gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$? (Spielen Sie mit Ihrem Taschenrechner: Drücken Sie wiederholt die $\sqrt{\ }$-Taste.)
2. Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 3.8 Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist.

Aufgabe 3.9 Sei $a_1 = h \geq 0$ und $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{3}{16}$. Bestimmen Sie, ob (a_n) konvergent ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3.10

1. Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.
2. Es sei $a_n > 0$ und (a_n) eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.
3. Sei $q > 1$. Zeigen Sie, dass (q^n) gegen ∞ divergiert.
4. Es sei (a_n) eine konvergente Folge und (b_n) divergiere gegen ∞. Warum divergiert $(a_n + b_n)$ ebenfalls gegen ∞?

Aufgabe 3.11 Sei

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3.3 Stetige Funktionen

Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ und a ein Element von A.

1 Wir nennen f in a folgenstetig, wenn für jede konvergente Folge (a_n), $a_n \in A$, mit Grenzwert a gilt $f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

2 Wir nennen f stetig in a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in A$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Satz 3.4 Eine Funktion ist stetig in a genau dann, wenn sie folgenstetig in a ist.

f sei stetig in a und (a_n) eine Folge in A mit $\lim a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $x \in A$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Weiterhin existiert $N_{\delta(\varepsilon)}$, so dass für alle $n \geq N_\delta$ gilt $|a_n - a| < \delta$. Dann ist für alle $n \geq n_{\delta(\varepsilon)}$

$$|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Also ist f folgenstetig in a. Sei umgekehrt f folgenstetig in a. Wäre f nicht stetig in a, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x-a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Setze $\delta_n = 1/n$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \neq a$ mit $x_n \in A$, $|x_n - a| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Dies bedeutet, dass die Folge (x_n) gegen a konvergiert, jedoch die Folge $(f(x_n))$ nicht gegen $f(a)$, Widerspruch! ■

Satz 3.5

1 Sei $f\colon A \to R$, $f(A) \subset B$ stetig in a und $g\colon B \to \mathbb{R}$ stetig in B. Dann ist $g \circ f$ stetig in a.

2 Sind $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ stetig in a, so auch $f+g$, $f \cdot g$ und f/g.

(Letzteres gilt nur, wenn $g(a) \neq 0$.)

1 Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Dann konvergiert $f(a_n)$ gegen $f(a) = b$ und $(g(f(a_n))$ gegen $g(b) = g(f(a))$.

2 Ist (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so gilt nach Satz 3.2:

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} (f(a_n) + g(a_n)) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} g(a_n)\,.$$

Die anderen Aussagen zeigt man analog. ■

Beispiel: Es folgt, dass alle Polynomfunktionen, wie z. B. $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + \pi x - 1$, stetige Funktionen sind. Auch *rationale* Funktionen, d. h. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen sind, sind stetig in allen a mit $q(a) \neq 0$.

Aufgaben

COMPANION WEBSITE
Lösung

Aufgabe 3.12 Die Funktion $f(x)$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } -1 < x < 2 \\ \frac{5}{2} & \text{für } x = 2 \\ 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$. Für welche Werte von x ist f nicht stetig?

Aufgabe 3.13 Für welche Werte von a und b ist $f(x)$ überall stetig:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-2} & \text{für } x \leq 0 \\ 2x - b & \text{für } 0 < x < 2 \\ 6 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Aufgabe 3.14 Die Funktion $f(x)$ sei überall stetig und für $x \neq \pm 2$ gleich $\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$. Berechnen Sie $f(-2)$ und $f(2)$.

Aufgabe 3.15 Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist für $x \neq 1, 2$ gleich $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+3}$.

Ist es möglich, $f(1)$ und $f(2)$ so zu wählen, dass f stetig ist für $x = 1$ und $x = 2$?

Aufgabe 3.16

1. Warum gelten die Ungleichungen $|\sin(x)| < |x|$ und $2 - 2\cos(x) < x^2$? Folgern Sie, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in 0 stetig sind.
2. Benutzen Sie die Additionstheoreme, um zu zeigen, dass die Sinus- und die Cosinusfunktion für alle a in $\mathbb{R}$ stetig sind.

Aufgabe 3.17 Es sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $a \in I$ und $f(a) > c$ für ein a in I. Warum existiert eine Umgebung V von a, so dass $f(x) > c$ für alle $x \in V$?

Aufgabe 3.18 Die Funktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}+ax^2}{x^n+2}$ sei stetig in 1. Berechne a.

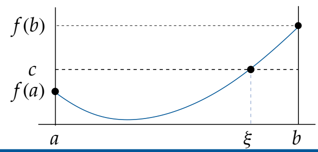
Aufgabe 3.19

1. Sei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ in 0 nicht (folgen)stetig ist.
2. Sei $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ stetig ist in 0.

3.4 Der Zwischenwertsatz

Satz 3.6 (Zwischenwertsatz)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < c < f(b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.



Ein solches ξ können wir einfach angeben: Sei ξ das Supremum der Menge

$$A = \{x \in [a,b]\colon f(x) < c\}\ .$$

Dann ist $f(\xi)$ tatsächlich gleich c: Wäre nämlich $f(\xi) < c$, so gäbe es ein $\eta > \xi$ mit $f(x) < c$ für alle $x \in (\xi, \eta)$. Also wäre ξ keine obere Schranke von A.

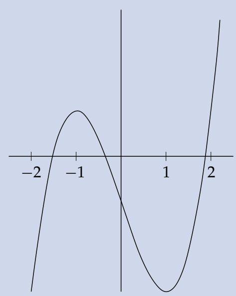
Wäre $f(x) > c$, so gäbe es $\eta < \xi$, so dass $f(x) > c$ für alle $x \in (\eta, \xi)$. Dann wäre auch η eine obere Schranke von A und ξ wäre nicht die *kleinste* obere Schranke. Es bleibt somit nur der Fall $f(\xi) = c$ übrig. ■

Existiert ein (positives) ξ mit $f(\xi) = c$, so gibt der Beweis der Existenz des Supremums (Satz 1.3) uns im Prinzip die Möglichkeit, eine Binärentwicklung oder eine Dezimalbruchentwicklung eines Elements ξ zu finden, sobald wir in der Lage sind, Funktionswerte auszurechnen. Nehmen wir einfachheitshalber an, dass $a, b \in \mathbb{N}$.

Bestimme zunächst die maximale natürliche Zahl $\lfloor x \rfloor_0$ mit $f(\lfloor x \rfloor_0) \le c$. Danach suche x_{-1} zwischen 0 und 9 maximal mit $f(\lfloor x \rfloor_1) \le c$ usw. Im Allgemeinen suche x_{-n} zwischen 0 und 9 maximal mit $f(\lfloor x \rfloor_n) \le c$ usw. Diese Methode, die Dezimalentwicklung von ξ zu bestimmen, haben wir schon bei $\sqrt{2}$ gesehen. Bei $\sqrt{2}$ suchen wir ein ξ mit $\xi^2 = 2$, dies ist das Beispiel $f(x) = x^2$.

Beispiel:
Wir suchen eine Nullstelle ξ der Gleichung $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$. Wir sehen in dem Graphen drei Nullstellen. Wir werden die größte Nullstelle annähern.

$f(1) = -3$	$f(2) = 1$
$f(1{,}8) < 0$	$f(1{,}9) > 0$
$f(1{,}87) < 0$	$f(1{,}88) > 0$
$f(1{,}879) < 0$	$f(1{,}880) > 0$
$f(1{,}8793) < 0$	$f(1{,}8794) > 0$
$f(1{,}87938) < 0$	$f(1{,}87939) > 0$



Wir finden die Annäherung $\xi \approx 1{,}87938\cdots$ der größten Nullstelle.

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.20 Bestimmen Sie fünf Nachkommastellen der beiden anderen Nullstellen von $f(x)$ in dem Beispiel auf der vorherigen Seite.

Aufgabe 3.21 Finden Sie zwei Nachkommastellen einer reellen Lösung der nachfolgenden Gleichungen. Sie können hierbei einen Taschenrechner benutzen.

1. $x^3 - 3x + 4 = 0$	2. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4 = 0$	4. $\cos(x) - x = 0$
5. $x^3 - 15x + 10 = 0$	6. $x^4 + 25x^3 - 15 = 0$
7. $-x^5 - 4x^2 + 2\sqrt{x} + 5 = 0$	8. $\tan(x) + 2x - 5 = 0$

Aufgabe 3.22 Es sei $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ existieren mit $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

Aufgabe 3.23 Zeichnen Sie den Graphen von $f(x) = \sqrt{2x+5}$ und $g(x) = 4 - x^2$. Zeigen Sie, dass zwei ξ existieren mit $f(\xi) = g(\xi)$ und finden Sie jeweils drei Nachkommastellen von ξ.

Aufgabe 3.24 Sei $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [-1,1]$ mit $f(\xi) = \xi$. Dieses ξ nennen wir einen Fixpunkt.

Bemerkung: Ist $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe und $f\colon D \to D$ stetig (bis jetzt nicht im Buch definiert, siehe aber Abschnitt 4.12), so hat f einen Fixpunkt. Eine ähnliche Aussage gilt ebenso für höhere Dimensionen. Dieser Satz heißt der *Brouwersche Fixpunktsatz*. Der ist jedoch für höhere Dimensionen viel schwieriger zu beweisen.