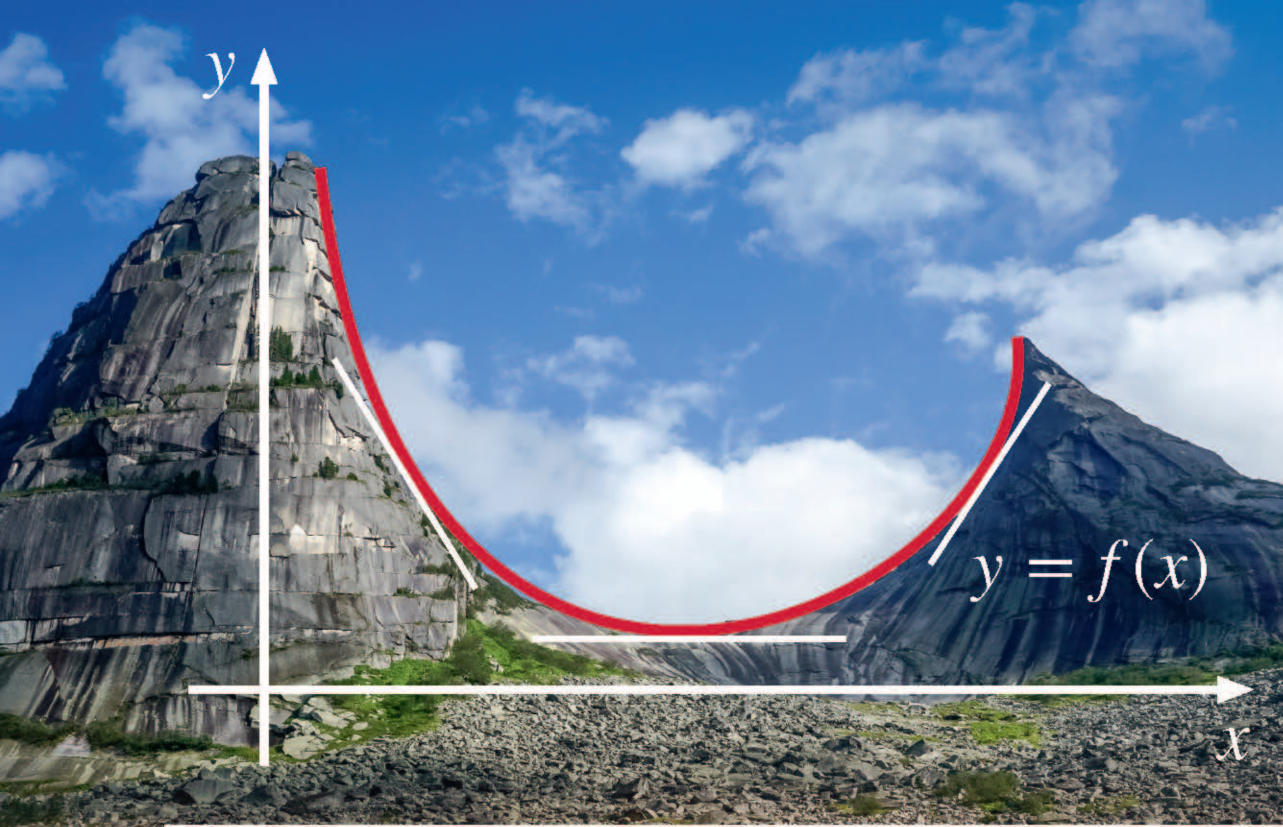


Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Das Übungsbuch

4., aktualisierte Auflage

Fred Böker

Pearson

EXTRAS ONLINE

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Der Umwelt zuliebe verzichten wir auf Einschweißfolie.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

25 24 23

ISBN 978-3-86894-438-9 (Buch)
978-3-86326-339-3 (E-Book)

Programmleitung: Martin Milbradt, mmilbradt@pearson.de
Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de
Coverabbildung: © Pavel Sipachev, 123RF
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: GraphyCems, Villatuerta (Navarra)

Printed in Spain

Multiple Integrale

16.1 Doppelintegrale über endliche Rechtecke . . . 122
16.2 Integration über unendliche Rechtecke 122
16.3 Unstetige Integranden und andere Erweiterungen 122
16.4 Integration bei mehreren Variablen 123
Weitere Aufgaben zu Kapitel 16 123

16

ÜBERBLICK

16.1 Doppelintegrale über endliche Rechtecke

[1] Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int_0^1 \int_0^1 dydx$ **b)** $\int_{-1}^1 \int_0^1 dydx$ **c)** $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dydx$

Ist das Ergebnis plausibel?

[2] Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_0^1 x\, dydx$. Haben Sie eine anschauliche Erklärung für das Ergebnis?

[3] Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\, dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 xy\, dydx$ **c)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 y^3)\, dydx.$

16.2 Integration über unendliche Rechtecke

[1] Nach Beispiel 10.7.1 gilt $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ für jedes positive λ (also insbesondere für $\lambda = 1$) und nach (10.7.9) gilt $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Nutzen Sie dies zur Berechnung der Integrale

a) $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dydx$; **b)** $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dydx$; **c)** $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y} dydx$.

[2] Nach Beispiel 10.7.1 gilt $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ für jedes positive λ.
Nutzen Sie dies zur Berechnung des Integrals $\int_0^\infty \int_0^\infty 8e^{-2x-4y} dydx$.

16.3 Unstetige Integranden und andere Erweiterungen

[1] Betrachten Sie Abbildung 16.3.1 im Lehrbuch, die den Definitionsbereich der in (16.3.1) definierten Funktion $f(x,y)$ zeigt. Der Definitionsbereich besteht aus dem Teil des ersten Quadranten, der oberhalb der Winkelhalbierenden liegt. Dort ist $f(x,y) = e^{-y}$. Überall sonst ist $f(x,y) = 0$. Es wird gezeigt, dass das Volumen unterhalb des Graphen gleich 1 ist.

a) Was ergibt sich bei unverändertem Definitionsbereich für das Volumen unterhalb des Graphen, wenn $f(x,y) = e^{-x}$ statt $f(x,y) = e^{-y}$ ist?

b) Was ergibt sich für das Volumen unterhalb des Graphen, wenn $f(x,y) = e^{-y}$ für alle (x,y) aus dem ersten Quadranten, die unterhalb der Winkelhalbierenden liegen (und 0 sonst).

16.4 Integration bei mehreren Variablen

[1] In Aufgabe 16.4.1 im Lehrbuch sollten Sie das Integral

$$I = \iiint_C (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

berechnen, wobei C der *Einheitswürfel* in $\mathbb{R}^3$ ist, der bestimmt ist durch die Ungleichungen $0 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, 2, 3$. Das Ergebnis ist $I = 1$. Was ergibt sich, wenn wir C ersetzen durch $C^* = \{(x_1, x_2, x_3) \colon -1 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2, 3\}$? Versuchen Sie, das Ergebnis ohne Integration zu bestimmen.

[2] Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y^2 + z^3) dxdydz$, indem Sie mindestens zwei verschiedene Reihenfolgen der Integration verwenden.

Weitere Aufgaben zu Kapitel 16

[1] In Abbildung 14.3.2 im Lehrbuch wird der Graph der Funktion $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$ gezeigt. Berechnen Sie das Integral dieser Funktion über das Quadrat $Q = \{(x, y) \colon -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
Was kann man geometrisch aus diesem Ergebnis schließen? Ist das Volumen zwischen den positiven z-Werten und der xy-Ebene größer als das Volumen zwischen den negativen z-Werten und der xy-Ebene?

[2] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^1 (xyz) dxdydz$, indem Sie wie hier vorgegeben zunächst über x, dann über y und zum Schluss über z integrieren. Könnte man schneller zum Ergebnis kommen?

Optimierung ohne Nebenbedingungen

17

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen . . 126

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen . 126

17.3 Lokale Extremstellen 127

17.4 Lineare Modelle mit quadratischer Zielfunktion 127

17.5 Der Extremwertsatz 128

17.6 Funktionen von mehreren Variablen 129

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem 129

Weitere Aufgaben zu Kapitel 17 130

ÜBERBLICK

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen

[1] Bestimmen Sie die einzig mögliche Extremstelle (x_0, y_0) von

a) $f(x, y) = -2x^2 + y^2 + 48x - 36y - 100$ **b)** $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 48x - 16y + 100$

[2] Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Qualitäten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten für die Herstellung von x Einheiten der Qualität A und y Einheiten der Qualität B seien $K(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 14$. Die Preise pro Einheit seien 24 Euro für Qualität A und 12 Euro für Qualität B. Das Unternehmen ist in der Lage, den gesamten Output zu diesen festen Preisen zu verkaufen. Die Gewinnfunktion besitzt unter diesen Voraussetzungen ein Maximum. Bestimmen Sie die Werte von x und y, die den Gewinn maximieren.

[3] Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Arten A und B von Spezialwerkzeugen. Für die Herstellung von x Einheiten von A und y Einheiten von B seien die täglichen Kosten beschrieben durch $K(x, y) = 6x^2 - 24x + 12xy - 120y + 12y^2 + 344$. Eine Einheit des qualitativ hochwertigeren Spezialwerkzeugs A bietet das Unternehmen für 120 Euro an. Der Verkaufspreis eines Spezialwerkzeugs der Art B beträgt 60 Euro. Unter diesen Voraussetzungen und der Annahme, dass alle hergestellten Güter zu den gegebenen Preisen abgesetzt werden, besitzt die Gewinnfunktion genau ein Maximum. Wie viele Einheiten x und y der Spezialwerkzeuge A und B muss das Unternehmen täglich produzieren, um den Gewinn zu maximieren?

[4] Die Funktion $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 18x - 21y$ hat ein Minimum. Bestimmen Sie die Stelle (x_0, y_0), an der das Minimum angenommen wird. Bestimmen Sie außerdem den Minimalwert, d. h. $f(x_0, y_0)$.

[5] Ein Unternehmen habe die Produktionsfunktion $Q = F(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}$ mit $K > 0$ als Kapitalinput und $L > 0$ als Arbeitsinput. Der Erlös pro verkaufter Einheit sei P. Die Kosten pro Einheit Kapital bzw. Arbeit seien r bzw. w. Das Unternehmen möchte seinen Gewinn $\pi(K, L)$ maximieren.

a) Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Maximum des Gewinns an.

b) Nehmen Sie nun an, dass das Unternehmen einen Preis von $P = 8$ erzielen kann. Die Kosten für die beiden Inputfaktoren sind $r = 2$ und $w = 2$. Außerdem ist die gewinnoptimale Menge für den Inputfaktor Kapital $K^* = 8$. Berechnen Sie die gewinnoptimale Menge L^*.

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

[1] Für welche (x, y) ist die Funktion $f(x, y) = e^{xy}$ konvex?

[2] **a)** Ist die Funktion $f(x, y) = 2x^2 + 6y^2 + 4xy + 8y - 16x + 5$ konkav oder konvex?

b) Bestimmen Sie die einzige kritische Stelle dieser Funktion. Ist dies eine Maximum- oder Minimumstelle?

[3] Die GoeKart AG produziert zwei verschiedene Arten A und B eines Fahrzeugs. Der Preis für ein Fahrzeug des Typs A beträgt 1000 Euro und der Preis für ein Fahrzeug des Typs B beträgt 800 Euro. Die Kosten der Produktion von x Einheiten des Typs A und y Einheiten des Typs B betragen $C(x,y) = 150x^2 - 100xy + 60y^2 - 600x - 400y + 10\,000$. Finden Sie das Produktionsniveau (x^*, y^*), das den Gewinn der GoeKart AG maximiert.

17.3 Lokale Extremstellen

[1] Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion $f(x,y) = x^4/4 - 3x^3 - y^2 + 4$ und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der zweiten Ableitungen. Es ist möglich, dass Sie dabei keine Entscheidung treffen können.

[2] Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x^2 + y - 2)^2 - 8$ und klassifizieren Sie diese. Untersuchen Sie auch, ob die Extremstellen gegebenenfalls globale Extremstellen sind.

[3] Ermitteln Sie alle kritischen Stellen und klassifizieren Sie diese, wenn

a) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 6y^2$ **b)** $f(x,y) = 10x^3 - 15xy + y^3 + 8$

c) $f(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2$ **d)** $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + y^2 + 10$

17.4 Lineare Modelle mit quadratischer Zielfunktion

[1] Ein Produkt werde auf zwei isolierten Märkten angeboten, die Preise und Mengen seien P_i und $Q_i, i = 1,2$, wobei gelte $P_1 = 100 - Q_1$ und $P_2 = 90 - 2Q_2$. Die Kosten für die Herstellung seien $C = 10(Q_1 + Q_2)$. Unter diesen Voraussetzungen besitzt die Gewinnfunktion ein eindeutig bestimmtes Maximum. Bestimmen Sie die Mengen Q_i^* und die Preise $P_i^*,\ i = 1,2$, die die Gewinnfunktion maximieren. Geben Sie auch den maximalen Gewinn an.

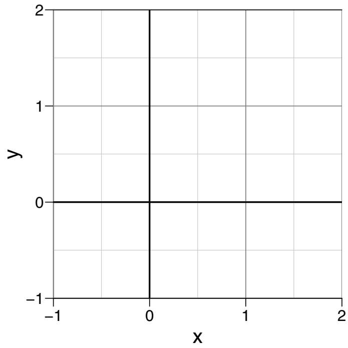
[2] Ein Unternehmen vertreibe ein Produkt auf zwei verschiedenen Märkten mit den Nachfragefunktionen $P_1 = 150 - 2Q_1$ und $P_2 = 79 - Q_2$. Die Kostenfunktion sei $C = 2Q_1 + Q_2$.

a) Welche Preise P_1 und P_2 maximieren den Gewinn? Setzen Sie voraus, dass es ein Maximum gibt.

b) Welcher Preis P maximiert den Gewinn, wenn „Diskriminieren“ verboten ist, d. h. wenn auf beiden Märkten derselbe Preis gilt? Begründen Sie in diesem Fall, dass Sie das Maximum gefunden haben.

17.5 Der Extremwertsatz

[1] Die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + y - 2$ sei definiert auf dem abgeschlossenen, beschränkten Bereich $D = \{(x,y)\colon\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, d. h. auf dem positiven Einheitsquadrat. Zeichnen Sie sich den Bereich auf. Bestimmen Sie die globalen Maximum- und Minimumstellen dieser Funktion in D.



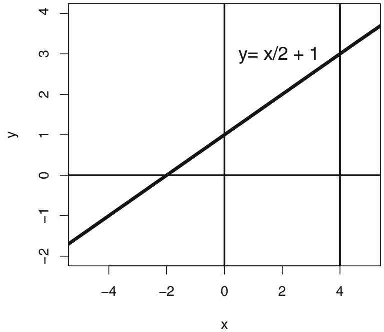
[2] Bestimmen Sie die Maximum- und Minimumstellen der Funktion$f(x,y) = x^4 + y^4$. Der Definitionsbereich der Funktion sei $D = \{(x,y)\colon 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq 2\}$. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion keine kritischen Stellen im Innern von D hat.

[3] Bestimmen sie die Extremstellen der Funktion $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 6y + x + 3$ mit dem Definitionsbereich $D = \{(x,y)\colon\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x\}$.

[4] Die Funktion f sei auf dem Kreis $K = \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ definiert durch $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$. Bestimmen Sie die globalen Extremstellen und die zugehörigen Extremwerte.

[5] Betrachten Sie die auf der Menge $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 9\}$ definierte Funktion $f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 9$. Nach dem Extremwertsatz hat diese Funktion ein Maximum und ein Minimum. Bestimmen Sie die Maximumstelle und den Maximalwert sowie die Minimumstelle und den Minimalwert.

[6] Die Funktion $f(x,y) = 9x + 8y - 6(x+y)^2$ ist gegeben auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y)|\ 0 \leq x \leq 4;\ y \geq 0;\ y \leq \frac{1}{2}x + 1\}$. Bestimmen Sie die globalen Extremstellen der Funktion. Skizzieren Sie sich zunächst den Definitionsbereich in der folgenden Abbildung.



17.6 Funktionen von mehreren Variablen

[1] Bestimmen Sie alle kritischen Stellen für

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 - x_3$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 - 2x_1^2 x_2 + x_2^2 + (x_1 - 1)^2 + x_3^4$

c) $f(x, y, z) = x^3 + xy + 4y + z^4$

[2] Ein Unternehmen produziere von drei verschiedene Gütern die Mengen A, B und C nach der Gesamtkostenfunktion $K(A, B, C) = A^2 + 2B^2 + 3C^2 + AB + BC + 100$. Die Marktpreise der Güter seien dabei exogen vorgegeben mit $p_A = 40;\ p_B = 50$ und $p_C = 80$. Ermitteln Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen von A, B und C. Hinweis: Betrachten Sie nur die notwendigen Bedingungen.

[3] Ein Unternehmen produziert drei verschiedene Güter auf drei Aggregaten. Dabei entstehen für die Gesamtproduktion Fixkosten in Höhe von 500 Euro. Daneben entstehen variable Kosten in Höhe von $x^2/2, y^2/4$ und $z^2/8$, wobei x, y, z die produzierten Mengen sind. Das Unternehmen kann für alle drei Güter jeweils 50 Euro auf dem Markt verlangen. Berechnen Sie die gewinnmaximierende Angebotsmenge (x^*, y^*, z^*) für alle drei Güter. Hinweis: Betrachten Sie nur die notwendigen Bedingungen.

[4] Bestimmen Sie die einzige Extremstelle der Funktion $g(x, y) = e^{(x^2-4x+4+y^2)}$. Ist es ein Maximum oder ein Minimum? Hinweis: Die Maximierung (Minimierung) einer Funktion ist äquivalent zur Maximierung (Minimierung) einer strikt monoton wachsenden Transformation dieser Funktion.

[5] Die Funktion $f(x, y, z) = \ln\left(\sqrt{-x^2 - y^2 - z^2 + 20x + 30y + 26z}\right)$ besitzt eine Maximumstelle. Bestimmen Sie diese. Beachten Sie, dass sowohl die ln-Funktion als auch die Wurzelfunktion strikt monoton wachsende Funktionen sind.

[6] Die Funktion $h(x, y) = 1 + \ln(x^3 - 3xy + y^3 + 2)$ hat genau eine lokale Extremstelle. Bestimmen Sie die Koordinaten (x_0, y_0) dieser Stelle und geben Sie an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Hinweis: Die Rechnung lässt sich wesentlich vereinfachen, wenn Sie eine monotone Transformation der gegebenen Funktion betrachten.

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

[1] **a)** Ein Unternehmen produziere x Einheiten eines Gutes. Die gesamte hergestellte Ware kann zum festen Stückpreis p verkauft werden. Die Kostenfunktion sei $C(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x$. Das Unternehmen möchte seinen Gewinn maximieren. Es stellt sich die Frage, wie der maximale Gewinn π^* vom Preis abhängt. Bestimmen Sie den optimalen Gewinn $\pi^*(p)$ als Funktion des Preises p und geben Sie die Änderungsrate der Optimalwertfunktion bezüglich p an.

b) Beantworten Sie dieselben Fragen für folgende Situation: Der Stückpreis sei $p > 6$ und die Kostenfunktion $C(x) = 4x + x^2$. Außerdem sind für jede produzierte Einheit 2 Geldeinheiten Steuern zu entrichten.

c) Bestimmen Sie den optimalen Gewinn $\pi^*(p)$ als Funktion des Preises p und geben Sie die Änderungsrate der Optimalwertfunktion bezüglich p an, wenn dem Unternehmen Fixkosten für die Miete der Produktionshalle in Höhe von 500, Materialkosten in Höhe von $20x$, Belastungen durch Abgaben und Steuern in Höhe von $2x^2$ entstehen.

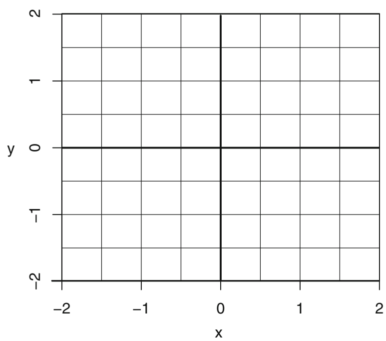
[2] Für einen Monopolisten gelte die Nachfragefunktion $P(Q)$, wobei P der Preis ist, wenn der Output Q ist. Die Kosten pro produzierter Einheit seien k. Die Gewinnfunktion ist dann $\pi(Q) = QP(Q) - kQ$. Das Maximum werde bei $Q^* = 145$ Einheiten erreicht. Um wieviel Euro ändert sich ungefähr der maximale Gewinn, wenn die Kosten um einen Euro steigen?

[3] Ein Unternehmen produziert und verkauft zwei Güter A und B. Die Preise pro Einheit seien P_A bzw. P_B. Die Kosten für die Produktion von x bzw. y Einheiten seien $C(x,y)$. Die Gewinnfunktion ist dann $\pi(x,y) = P_A \cdot x + P_B \cdot y - C(x,y)$. Das Unternehmen erzielt seinen maximalen Gewinn, wenn es 50 Einheiten von Gut A und 75 Einheiten von Gut B produziert, d. h. $x^* = 50$ und $y^* = 75$. Wie ändert sich der maximale Gewinn ungefähr, wenn der Preis (pro Einheit) für Gut A um einen Euro fällt, während der Preis (pro Einheit) für Gut B um einen Euro steigt.

Weitere Aufgaben zu Kapitel 17

[1] Sei $g(x,y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2$ mit dem Definitionsbereich $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich D in dem folgenden Koordinatensystem. Geben Sie dabei deutlich zu erkennen, welche Linien zu D bzw. nicht zu D gehören, indem Sie durchgezogene bzw. gestrichelte Linien verwenden.



b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von g im Innern von D und klassifizieren Sie diese.

c) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen und Extremwerte von g in D.