Experimentalphysik 1

Mechanik und Wärme

Martin Erdmann
Günter Flügge

Pearson

Zugangscode

Falls Sie beim Kauf Ihres eBooks keinen Zugangscode erhalten haben, kontaktieren Sie uns bitte über die folgende Seite und halten Sie Ihre Rechnung/Bestellbestätigung bereit:
https://www.pearson.de/ebook-zugangscode

Das Wichtigste zum Mitnehmen

Zum Mitnehmen: Koordinatensysteme 1

- Ein Ortsvektor $\vec{b}$ wird in **kartesischen Koordinaten** beschrieben durch

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} . \tag{9.1}$$

Die **Basis-** oder **Einheitsvektoren** entlang der Achsen des kartesischen Koordinatensystems $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ bilden ein **rechtshändiges orthogonales Dreibein**.

Mit dem räumlichen Linienelement

$$d\vec{s} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \tag{9.55}$$

lassen sich die Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ und die Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ definieren.

- Zwischen den **zylindrischen Koordinaten r, φ, z** (Spezialfall $z = 0$: **Polarkoordinaten**) und den Komponenten eines Vektors $\vec{b}$ im kartesischen System besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} b_x &= r \cos(\varphi) \\ b_y &= r \sin(\varphi) \\ b_z &= z \, . \end{aligned} \tag{9.14}$$

Auch die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ bilden ein rechtshändiges orthogonales Dreibein.

Mit dem räumlichen Linienelement

$$d\vec{s} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z \tag{9.22}$$

lassen sich wieder $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ und $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ beschreiben.

Das Flächenelement auf den Zylinderdeckeln ($z = const.$) ist

$$dA = r\,dr\,d\varphi \, . \tag{9.26}$$

Das Flächenelement auf dem Zylindermantel ist

$$dA = r \cdot d\varphi\,dz \, . \tag{9.28}$$

Das Volumenelement ist

$$dV = rdr\,d\varphi\,dz \, . \tag{9.31}$$

Zum Mitnehmen: Koordinatensysteme 2

- Zwischen den **Kugelkoordinaten** (auch: sphärische Koordinaten) mit dem Radius r, dem Azimutwinkel φ, und dem Polarwinkel ϑ bezüglich $\vec{e}_z$ und den kartesischen Komponenten eines Vektors $\vec{b}$ besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} b_x &= r\cos(\varphi)\ \sin(\vartheta) \\ b_y &= r\sin(\varphi)\ \sin(\vartheta) \\ b_z &= r\cos(\vartheta)\ . \end{aligned} \tag{9.36}$$

  Die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ bilden ebenfalls ein rechtshändiges orthogonales Dreibein.

  Mit dem räumlichen Linienelement

$$d\vec{s} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + r\ \sin(\vartheta)\ d\varphi\,\vec{e}_\varphi \tag{9.41}$$

  lassen sich die Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ und die (recht komplizierte) Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ beschreiben.

  Das Flächenelement ist

$$dA = r^2 \sin(\vartheta)\ d\vartheta\,d\varphi\,. \tag{9.47}$$

  Das Volumenelement ist

$$dV = r^2 dr\,\sin(\vartheta)\ d\vartheta\,d\varphi\,. \tag{9.50}$$

- Der **Gradient grad** ist definiert als ein Vektor aus den partiellen Ableitungen in die drei Koordinatenrichtungen (Komponenten der Linienelemente $d\vec{s}$ (9.55) (9.22) (9.41)):

$$\text{grad} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{9.13}$$

  Der Gradient in Zylinderkoordinaten lautet

$$\text{grad} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{9.33}$$

  Der Gradient in Kugelkoordinaten lautet

$$\text{grad} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,. \tag{9.52}$$

Gravitationswechselwirkung nach Newton

10

ÜBERBLICK

» Gravitation bezeichnet die Anziehung zwischen massebehafteten Körpern und gehört zu den fundamentalen Wechselwirkungen der Natur. In Form der Erdanziehung ist sie eine unmittelbare physikalische Lebenserfahrung für uns.

Im größeren Zusammenhang basieren die Planetenbewegungen unseres Sonnensystem auf Gravitationswechselwirkung. Auch die Sterne unserer Milchstraße sind durch Gravitation gebunden. Schließlich ist die Entstehungsgeschichte von Galaxien, Sternen und Planeten unseres Universums in wesentlichen Aspekten eine Folge der Gravitation.

In diesem Kapitel stellen wir Newtons Gravitationsgesetz vor. Wir berechnen einerseits die Bahnkurven der Planeten, die durch Gravitation im Sonnensystem gebunden sind. Andererseits zeigen wir für sich frei bewegende Himmelskörper, dass ihre Flugrichtungen durch Streuprozesse an anderen Himmelskörpern aufgrund der Gravitationswechselwirkung verändert werden. «

10.1 Gravitationskraft

Zwischen zwei massebehafteten Körpern M und m wirkt eine anziehende Kraft, die Gravitationskraft (▶ Abbildung 10.1).

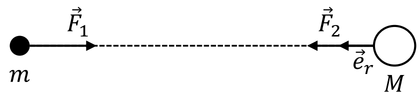

Abbildung 10.1 Zwei Massen (M) und (m) ziehen sich aufgrund der entgegengesetzt gleichen Gravitationskräfte F_1 und F_2 gegenseitig an.

In folgendem Kraftgesetz von Newton ist die Anziehungskraft der Massen formuliert:

$$\vec{F} = -G \frac{m\,M}{r^2} \vec{e}_r \tag{10.1}$$

Dabei sind die Kräfte auf die jeweilige Masse entgegengesetzt gerichtet und gleich groß: $\vec{F} = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Die verschiedenen Terme werden wir im Folgenden motivieren.

Stellen wir uns eine punktförmige Quelle der Intensität $I_\circ$ vor (z. B. eine Lampe), die gleichmäßig in alle Richtungen strahlt (▶ Abbildung 10.2). Im Abstand r verteilt sich die Intensität ihres Lichts auf die Kugeloberfläche $4\pi r^2$. Auf einer Einheitsfläche im Abstand r ist die registrierte Intensität der Quelle deswegen um folgenden geometrischen Faktor geringer:

$$I \propto I_\circ \frac{1}{r^2} \tag{10.2}$$

Für Punktquellen entsteht demnach durch Geometrie eine Abnahme der Intensität mit dem Quadrat des Abstands zur Quelle.

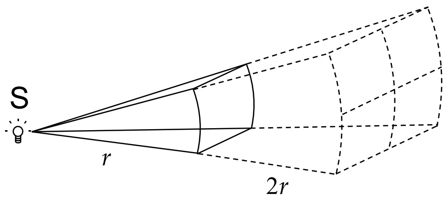

Abbildung 10.2 Verdeutlichung der $1/r^2$-Abhängigkeit der Gravitationskraft

Mit dieser Überlegung haben die verschiedenen Terme der Gravitationskraft (10.1) folgende Bedeutungen:

$F \propto \frac{1}{r^2}$	Die Kraft ist aus geometrischem Grund abnehmend,
$\vec{F} \propto \vec{e}_r$	sie wirkt entlang der Verbindungsachse,
$F \propto mM$	sie steigt mit der Größe der involvierten Massen,
$F < 0$	sie entspricht der Vorzeichenkonvention für anziehende Kräfte.

Der Parameter G ist eine wichtige Größe der Physik und heißt **Gravitationskonstante**. G hat den Wert [9]

$$G = (6{,}67430 \pm 0{,}00015) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \,. \tag{10.3}$$

Die Gravitationskraft ist eine **Zentralkraft**, da sie geometrisch nur vom Abstand r der beiden massebehafteten Körper abhängt. Denkt man sich eine Kugelschale um die Masse M und verschiebt die Masse m auf dieser Kugeloberfläche, bleibt die Gravitationskraft zwischen den beiden Massen gleich groß (▶ Abbildung 10.3).

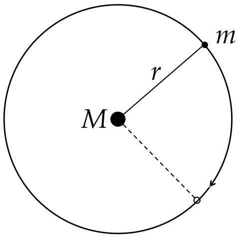

Abbildung 10.3 Die Gravitationskraft zwischen den Massen M und m ist auf einer Kugelschale um M für m konstant.

Wenn man die Masse m von der anderen Masse M entfernt, ist die dabei geleistete Arbeit nur vom Abstand r zwischen den beiden Massen abhängig und unabhängig vom exakten Weg. Die Gravitationskraft ist somit eine **konservative Kraft**.

Befindet man sich in Erdnähe ($h \ll R_{\mathrm{Erde}}$), können wir näherungsweise alle Werte zusammenfassen, die sich nicht (G, M) oder kaum ($r = R_{\mathrm{Erde}} + h \approx R_{\mathrm{Erde}}$) verändern . Aus (10.1) ergibt sich dann

$$g \equiv \frac{G \cdot M_{\mathrm{Erde}}}{R^2_{\mathrm{Erde}}} \tag{10.4}$$

$$= \frac{6{,}67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}}{(6371)^2} \cdot \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}^2} \tag{10.5}$$

$$\approx 9{,}8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \,. \tag{10.6}$$

Auf der Erde kann man also in guter Approximation mit

$$\vec{F} = -\frac{G \, M_{\mathrm{Erde}} \, m}{R^2_{\mathrm{Erde}}} \, \vec{e}_r = -m \, \vec{g} \tag{10.7}$$

rechnen. Aufgrund der Erdabplattung und unterschiedlicher Masseverteilungen, Höhen und Zentrifugalkräfte variiert der Wert der Erdbeschleunigung regional zwischen $\approx 9{,}83\,\mathrm{m/s}^2$ an den Polen und $\approx 9{,}78\,\mathrm{m/s}^2$ am Äquator. Der mittlere Wert in Deutschland beträgt $\approx 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$.

Aufgabe 26: Astronaut auf dem Mond

Wie viel stärker ist die Erdbeschleunigung g als die »Mondbeschleunigung« g'? Verwenden Sie die folgenden Größen:

$$M_{\text{Mond}} = 7 \cdot 10^{22}\,\text{kg}\,, \qquad R_{\text{Mond}} = 1\,800\,\text{km}\,, \qquad G = 7 \cdot 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Aufgabe 27: Schaukel auf der Sonne

Auf einer (abgekühlten) Sonne soll eine Schaukel mit der Pendellänge L installiert werden. Die Schwingungsperiode beträgt somit $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (4.87). Verwenden Sie $L = 1\,\text{m}$, $M_{\text{Sonne}} = 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$, $R_{\text{Sonne}} = 700\,000\,\text{km}$, $g = G\,M/R^2$ und $G = 7 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$, um die Schwingungsperiode auf der Sonne zu berechnen. Vergleichen Sie die Schwingungsperiode auf der Sonne mit der Schwingungsperiode auf der Erde.

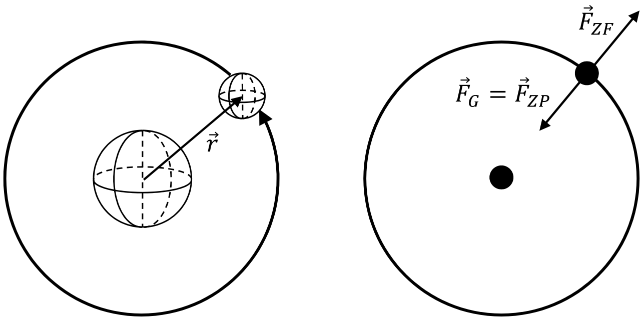

Abbildung 10.4 Der Mond umkreist die Erde im Abstand r. Die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ entspricht dabei der zur Kreisbewegung gehörenden Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP}$ (und steht der Zentrifugalkraft $\vec{F}_{ZF}$ entgegen).

Beispiel 28: Mondbewegung, Erdmasse

Die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ (10.1) hält das System aus Erde und Mond zusammen (► Abbildung 10.4). Eine Kollision der beiden Himmelskörper wird nur deswegen verhindert, weil der Mond um die Erde kreist. Die Kreisbewegung impliziert die Existenz einer Zentripetalkraft $\vec{F}_{\text{ZP}} = -m_M\omega^2\vec{r}$ (4.21), die radial und entgegengesetzt zur Zentrifugalkraft $\vec{F}_{ZP}$ steht.

Gravitationskraft $\vec{F}_G$ und Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP}$ entsprechen dabei einander:

$$\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_G \tag{10.8}$$

$$-m_M\, r\, \omega^2\, \vec{e}_r = -\frac{G\, M_E\, m_M}{r^2}\, \vec{e}_r \tag{10.9}$$

Die Kreisfrequenz ω des Mondes können wir in die Umlaufzeit T des Mondes umschreiben $T = 2\pi/\omega$ (4.11) und erhalten

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G\, M_E}{r^3} \tag{10.10}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\, M_E}}\,. \tag{10.11}$$

Die Umlaufzeit steigt also etwas stärker als linear mit dem Abstand ($r^{3/2}$).

Mit Kenntnis der Mondumlaufzeit $T = 27$ Tage können wir mit (10.11) eine Bestimmung der Erdmasse M_E durchführen. Mit dem Abstand zwischen Mond und Erde von $|\vec{r}| = 400\,000$ km und der Gravitationskonstanten $G \approx 7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$ beträgt die Erdmasse

$$M_E = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx \frac{4\pi^2\left(4\,10^8\right)^3}{7\cdot 10^{-11}\,(27\cdot 9\,10^4)^2} \cdot \frac{\mathrm{m}^3}{\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\,\mathrm{s}^2} \approx 6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,. \tag{10.12}$$

Der korrekte Wert ist $M = 5{,}97219 \cdot 10^{24}$ kg [10].

10.1.1 Messung der Gravitationskonstanten

Mit der sogenannten Gravitationswaage führen wir einen Versuch durch, bei dem wir Massen aufgrund der Gravitationskraft beschleunigen. Aus ihrer beschleunigten Bewegung können wir die Gravitationskonstante G (10.3) bestimmen.

Versuchsaufbau

Eine Hantel mit zwei kleinen Massen m an ihren Enden ist an einem Faden aufgehängt (▶ Abbildung 10.5). Kleine Drehungen der Hantel können über einen Spiegel mithilfe eines Laserstrahls sichtbar gemacht werden.

Auf gleicher Höhe wie die beiden kleinen Massen befinden sich zwei große Massen M. Wegen der $1/r^2$-Abhängigkeit der Gravitationskraft $\vec{F}_G$ (10.1) wirkt $\vec{F}_G$ in guter Näherung nur zwischen den jeweils benachbarten Massen M und m.

Entscheidend für die Versuchsdurchführung ist, dass die beiden großen Massen M entweder von der einen oder von der anderen Seite auf die kleinen Massen m wirken (▶ Abbildungen 10.6). Durch den Wechsel wird die am Faden hängende Hantel gedreht. Dabei wirken zwei Drehmomente auf die Hantel.

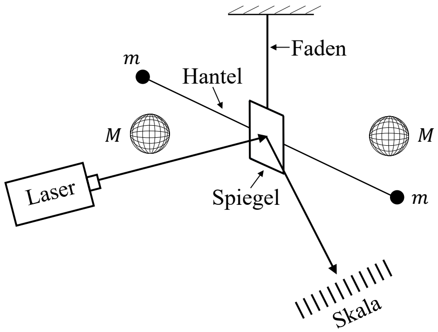

Abbildung 10.5 Gravitationswaage: 2 bewegliche Testmassen m werden von 2 großen festen Massen M angezogen. Die Bewegung wird über einen mitbewegten Spiegel gemessen, der einen Laserstrahl auf eine Skala reflektiert.

Drehmoment durch Gravitation

Die Gravitationskraft wirkt jeweils zwischen den beiden Massen m und M, die sich im Abstand r voneinander befinden und die beide den Abstand $\vec{R}$ von der Drehachse haben. Der Einheitsvektor $\vec{e}_r$ zeigt horizontal vom Zentrum der großen Masse zum Zentrum der kleinen Masse. Das gesamte Drehmoment auf die Hantel der kleinen Massen, das durch die Gravitationskraft zwischen den Kugeln verursacht wird, lautet (linke ► Abbildung 10.6)

$$\vec{D}_G = 2\vec{R} \times \vec{F}_G \tag{10.13}$$

$$= -2\vec{R} \times \frac{G\,m\,M}{r^2}\vec{e}_r\,. \tag{10.14}$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Drehmomente beider Kugelpaare. Der resultierende Drehimpulsvektor $\vec{D}_G$ steht immer parallel oder antiparallel zum Faden.

Drehmoment durch Torsion

Die Torsion (Verdrehung) des Fadens, an dem die Hantel mit den kleinen Massen aufgehängt ist, bewirkt ein rücktreibendes Drehmoment entlang des Fadens. Für kleine Auslenkungen ist es proportional zum Drehwinkel α:

$$\vec{D}_T = -D_F\,\alpha\,\vec{e}_F \tag{10.15}$$

In der Ausgangsstellung des Versuchs (linke ► Abbildung 10.6) zeigt der Einheitsvektor $\vec{e}_F$ entlang des Fadens nach oben. Das sogenannte Richtmoment D_F charakterisiert die Steifigkeit des Fadens und kann für kleine Winkel α als konstant angenommen werden.

Drehimpuls der Hantel

Zu Beginn des Versuchs (linke ► Abbildung 10.6) wirkt die Gravitationskraft so, dass sich die Hantel mit den kleinen Massen m gegen den Uhrzeigersinn den beiden großen Massen M entgegendreht. Da aber die Torsion des Fadens der Drehung entgegenwirkt, bleibt die Hantel irgendwann stehen.

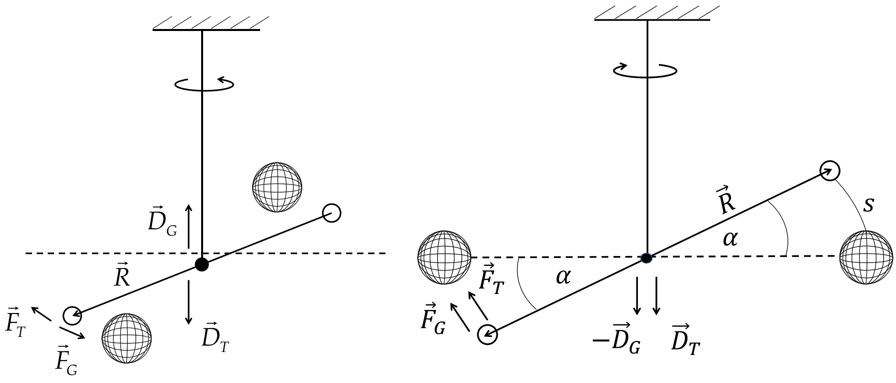

Abbildung 10.6 Links: In der Ausgangsposition heben sich die Kräfte der Gravitationsanziehung und der Torsion der Hantel mit den Testmassen sowie die zugehörigen Drehmomente $\vec{D}_G = -\vec{D}_T$ gerade auf. Rechts: In der Endposition werden die schweren Massen M auf die andere Seite der Testmassen geschwenkt. Die gleich großen Drehmomente $-\vec{D}_G = \vec{D}_T$ wirken jetzt beide im Uhrzeigersinn.

Solche Drehbewegungen der Hantel können wir mit ihrem Drehimpuls $\vec{L}_H$ (4.52) beschreiben. Nach dem Bewegungsgesetz für Drehbewegungen (4.70) verursachen die beiden äußeren Drehmomente $\vec{D}_G$ (10.14) und $\vec{D}_T$ (10.15) die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\vec{L}_H$:

$$\frac{d\vec{L}_H}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \vec{D}_i = \underbrace{\vec{D}_T}_{\text{Torsion}} + \underbrace{\vec{D}_G}_{\text{Gravitation}} \tag{10.16}$$

Der Drehimpuls der Hantel auf der linken Seite

$$\vec{L}_H = \vec{R} \times \vec{p} \tag{10.17}$$

zeigt ebenfalls je nach Bewegungsrichtung entlang des Fadens oder entgegengesetzt zum Faden. Den Drehimpulsbetrag und seine zeitliche Änderung drücken wir – wie beim Drehmoment der Torsion $\vec{D}_T$ (10.15) – über den Drehwinkel α aus. Dafür verwenden wir den Bogenweg $s = R\,\alpha$ (4.4) und seine zeitliche Ableitung $v = ds/dt = R\,d\alpha/dt$:

$$L_H = 2\,m\,R\,v = 2\,m\,R^2\,\frac{d\alpha}{dt} \tag{10.18}$$

$$\frac{dL_H}{dt} = 2\,m\,R^2\,\frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{10.19}$$

Startposition

Für die Ausgangsstellung des Versuchs wird ein Ruhezustand erreicht, wenn sich die Drehmomente aus Gravitation und Torsion ausgleichen. Dann verschwindet der Hanteldrehimpuls $\vec{L}_H = 0$. Die Drehmomente $\vec{D}_G$ und $\vec{D}_T$ stehen dabei antiparallel (linke ► Abbildung 10.6) und haben denselben Betrag:

$$|\vec{D}_G| = |\vec{D}_T| \tag{10.20}$$

Messposition

Bringt man wie in der rechten ► Abbildung 10.6 die großen Massen M auf die andere Seite der kleinen Massen m in denselben Abstand r, entspannt sich der verdrehte Faden: Die Hantel dreht sich im Uhrzeigersinn. Das von der Gravitationskraft verursachte Drehmoment auf die Hantel ist dem Betrag nach gleich groß wie zuvor, wirkt aber nun wie das Torsionsdrehmoment ebenfalls im Uhrzeigersinn.

Im Versuch sind die Bewegungen der Hantel mit den kleinen Massen m so klein, dass wir näherungsweise beide Drehmomente als konstant annehmen. Der Kugelabstand r wird nur sehr gering verändert, d. h. $\vec{F}_G = const.$, und damit ist auch das Gravitationsdrehmoment konstant:

$$\vec{D}_G = const. \tag{10.21}$$

Ebenso ist die Rückdrehung so gering, dass das Drehmoment durch Torsion ungefähr konstant ist:

$$\vec{D}_T = const. \tag{10.22}$$

Den Betrag des Torsionsdrehmoments kennen wir aus dem Anfangszustand $\vec{D}_T = -\vec{D}_G$ (10.20). Unmittelbar nach dem Positionswechsel der großen Massen wirkt das Torsionsdrehmoment gemeinsam mit dem Gravitationsdrehmoment im Uhrzeigersinn. Damit ist das gesamte auf die Hantel wirkende Drehmoment näherungsweise das Zweifache des von der Gravitation verursachten Drehmoments.

> *Die entscheidende experimentelle Maßnahme ist also das Umklappen des Drehmomentvektors der Gravitation bei näherungsweise konstanten Drehmomentbeträgen.*

Im Bewegungsgesetz (10.16) wechselt das Vorzeichen des Gravitationsdrehmoments und wir erhalten

$$\frac{d\vec{L}_H}{dt} = \vec{D}_T - \vec{D}_G = -2\,\vec{D}_G\,. \tag{10.23}$$

Durch Einsetzen der beiden Gleichungen (10.19) und (10.14) in das Bewegungsgesetz (10.23) können wir die Bewegungsgleichung aufstellen:

$$2\,m\,R^2\,\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -2\left(-2\,R\,\frac{G\,m\,M}{r^2}\right) \tag{10.24}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2\,\frac{G\,M}{R\,r^2} \tag{10.25}$$

In der Näherung konstanter Beschleunigung $d^2\alpha/dt^2 = const.$ handelt es sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Bahnkurve wir analog zu (1.33) durch zweifache Integration lösen.

Der Zeitpunkt, an dem wir die großen Massen auf die andere Seite der kleinen Massen bringen, startet den Messvorgang zur Zeit $t = 0$. Als Anfangsbedingung stellen wir bei der Versuchsdurchführung durch eine entsprechende Eichung $\alpha(t = 0) = 0$ ein. Bei $t = 0$ ruht zudem die Hantel, sodass keine anfängliche Winkelgeschwindigkeit vorliegt