MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Stochastik

STARK

Inhalt

Autor: Gundolf March

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

innerhalb der Mathematik stellt die Stochastik einen besonders schönen und interessanten Bereich dar, der aber nicht von allen als einfach empfunden wird. Dieses Buch hilft Ihnen dabei, in Ergänzung zum Unterricht wichtige **Zusammenhänge, Konzepte** und **Sätze der Stochastik** zu wiederholen und im Umgang mit dem Aufgabenmaterial einzuüben.

- Die wichtigen **Definitionen** eines Lernabschnitts werden schülergerecht und doch mathematisch präzise formuliert in farbig getönten Feldern hervorgehoben. Die unterrichtsrelevanten **Regeln** werden in farbig umrandeten Kästen verständlich zusammengefasst.
- An jeden Theorieteil schließen passgenaue **Beispiele** an, die die einzelnen Rechen- und Denkschritte genau und gut nachvollziehbar erläutern.
- Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.
- Jeder Lernabschnitt schließt mit zahlreichen **Übungsaufgaben**, mit deren Hilfe Sie die verschiedenen Themen einüben können. Hier können Sie überprüfen, ob Sie den gelernten Stoff auch anwenden können. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben steigt innerhalb eines Kapitels an – schwierige oder weiterführende Aufgaben sind mit einem Stern **(✳)** gekennzeichnet. Das Kapitel „Vermischte Aufgaben" besteht aus Wiederholungsaufgaben, die den Inhalt mehrerer vorheriger Kapitel abdecken und besonders für die Abiturvorbereitung geeignet sind.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit ausführlichen Hinweisen, die Ihnen den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.

Viel Spaß bei der Vorbereitung und viel Erfolg in der Abiturprüfung!

Gundolf March

Gundolf March

5 Pfadregeln

Außer zur Darstellung der Ergebnisse eines Zufallsexperiments können Baumdiagramme auch zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten benutzt werden.

Regel

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ergibt sich, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Teilstücke des entsprechenden Pfades miteinander **multipliziert**.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse am Ende der entsprechenden Pfade **addiert**.

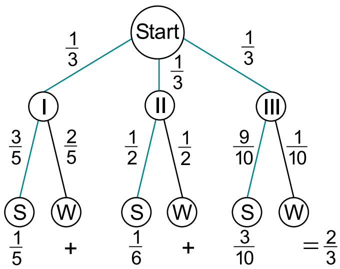
Beispiel

In einer Kiste befinden sich drei Urnen, die jeweils schwarze und weiße Kugeln enthalten. Über die jeweiligen Anzahlen gibt die Tabelle Auskunft:

Urne	I	II	III
schwarze Kugeln	3	1	9
weiße Kugeln	2	1	1

Nun wird erst eine Urne und dann daraus eine Kugel gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses S: „Die gezogene Kugel ist schwarz"?

Lösung:
Werden die Ereignisse, dass Urne I, Urne II bzw. Urne III gezogen werden, mit I, II bzw. III bezeichnet, erhält man nebenstehendes Baumdiagramm.



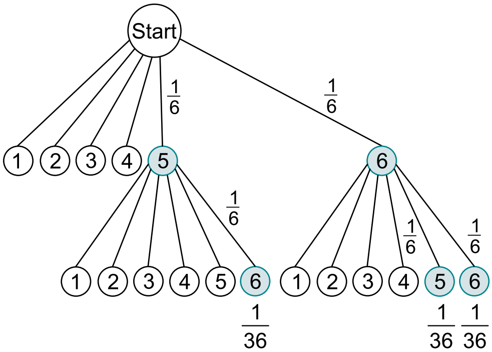
Die Wahrscheinlichkeit, die erste Urne zu wählen und daraus eine schwarze Kugel zu ziehen, ist nach der ersten Pfadregel $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.
Entsprechend sind die Wahrscheinlichkeiten für die zweite Urne $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ und für die dritte Urne $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{10}$.
Nach der zweiten Pfadregel gilt also $P(S) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{2}{3}$.

Beim Zeichnen des Baumdiagramms ist zu beachten, dass an jeder Verzweigung die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss.

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln mindestens die Augensumme 11 zu erzielen?

Lösung:
Um die Augensumme 11 erzielen zu können, muss der erste Wurf mindestens 5 zeigen. Es wird daher nicht das ganze Baumdiagramm gezeichnet:



Im Baumdiagramm wird abgelesen:
P(„Augensumme mindestens 11“)

$= P(\text{„Augensumme 11“}) + P(\text{„Augensumme 12“}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$

Am letzten Beispiel ist zu sehen, dass das Baumdiagramm nicht immer vollständig gezeichnet werden muss. Oft genügt ein sogenanntes **reduziertes Baumdiagramm**.

Aufgaben

37. Was ist beim zweifachen Münzwurf wahrscheinlicher: zwei gleiche oder zwei verschiedene Ergebnisse?

38. Ein Tourist weiß, dass es in seinem Urlaubsland eine Krankheit gibt, mit der sich 20 % der Besucher infizieren. Bei 25 % der Infizierten kommt die Krankheit zum Ausbruch, und bei 50 % der Erkrankten nimmt die Krankheit einen schweren Verlauf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen schweren Krankheitsverlauf?

39. Am Flughafen einer südamerikanischen Stadt werden 10 % der Passagiere auf zu verzollende Waren kontrolliert. Jeder Passagier muss einen elektronischen Zufallsmechanismus betätigen und bekommt ein grünes („keine Kontrolle“) oder rotes Licht („Kontrolle“) angezeigt. Fünf Freunde stehen in der Schlange vor dem Gerät.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle fünf kontrolliert werden?

b) keiner der fünf kontrolliert wird?

c) nur der erste und der zweite kontrolliert werden?

d) genau vier kontrolliert werden?

e) mindestens vier kontrolliert werden?

✳ **40.** Auf dem Tisch stehen zwei Urnen, jede mit 5 Kugeln, die weiß oder schwarz sind. Urne I enthält drei schwarze Kugeln, Urne II zwei. Mit einem Würfel wird bestimmt, ob aus Urne I (bei Augenzahl 1 und 2) oder aus Urne II (bei den Augenzahlen 3, 4, 5 und 6) gezogen wird.
Das Spiel wird zweimal ohne Zurücklegen durchgeführt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze Kugeln zu ziehen.

6 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen; Vierfeldertafeln

Aus den Kolmogorow-Axiomen lassen sich drei weitere Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ableiten, die Sie für eine Häufigkeitsverteilung schon beobachtet haben.

Regel

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

I. Satz vom unmöglichen Ereignis: $P(\emptyset) = 0$

II. Satz vom Gegenereignis: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

III. Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beispiele

1. Veranschaulichen Sie den Additionssatz mit einem Mengenbild und mit einer Vierfeldertafel.

34. a) Die Wahrscheinlichkeit, im Dezember, Januar oder Februar Geburtstag zu haben, beträgt $\frac{3}{12} = 0,25$.

b) Da die Sommerferien 6 Wochen dauern und das Jahr 52 Wochen hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Feriengeburtstag $\frac{6}{52} \approx 0{,}1154$.

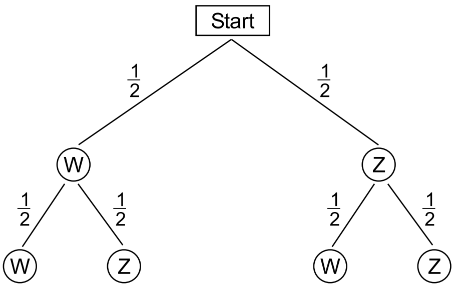
Setzt man diesen Wert für die relative Häufigkeit an und multipliziert ihn mit 25, erhält man gerundet 3. Es haben also wahrscheinlich drei Schüler in den Sommerferien Geburtstag.

35. Von den verbliebenen 5 Socken wird jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt. Der Quotient „Zahl der günstigen Fälle durch Zahl der möglichen Fälle“ hat somit den Wert $\frac{1}{5}$.

36. Gemäß der Laplace-Annahme (Gleichwahrscheinlichkeit aller Karten) gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{8}$$

37. Das Baumdiagramm hat folgende Gestalt:



Also gilt:
$P(\text{„Zwei gleiche Ergebnisse“}) = P(WW) + P(ZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
und
$P(\text{„Zwei verschiedene Ergebnisse“}) = P(WZ) + P(ZW) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Beides ist demnach gleichwahrscheinlich.

38. Man kann die Urlaubsreise des Touristen als dreistufiges Zufallsexperiment auffassen. Nach der 1. Pfadregel multiplizieren sich dabei die drei Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit für einen schweren Krankheitsverlauf beträgt daher $0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}025 = 2{,}5\ \%$.

39. Anhand eines reduzierten Baumdiagramms erkennt man:

a) $P(KKKKK) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001\ \%$

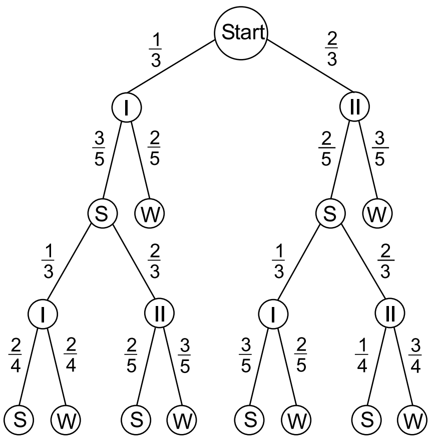
b) $P(\overline{K}\overline{K}\overline{K}\overline{K}\overline{K}) = 0{,}9^5 = 59{,}049\ \%$

c) $P(KK\overline{K}\overline{K}\overline{K}) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729\ \%$

d) $P(\overline{K}KKKK) + P(K\overline{K}KKK) + P(KK\overline{K}KK) + P(KKK\overline{K}K) + P(KKKK\overline{K})$
$= 5 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9 = 0{,}045\ \%$

e) $P(\text{„mindestens 4“}) = P(\text{„4“}) + P(\text{„5“}) = 0{,}045\ \% + 0{,}001\ \% = 0{,}046\ \%$

40. Beim Aufstellen des (reduzierten) Baumdiagramms muss beachtet werden, dass die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden. Das bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn zweimal aus derselben Urne gezogen wird.



Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach den Pfadregeln:
$P(SS) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{83}{450} \approx 18{,}44\ \%$

41. Aus dem Ansatz $P(A) = 3 \cdot P(\overline{A})$ ergibt sich:

$P(A) = 3 \cdot (1 - P(A))$

$P(A) = 3 - 3 \cdot P(A)$

$4 \cdot P(A) = 3$

Es folgt:

$P(A) = \frac{3}{4}$ und $P(\overline{A}) = \frac{1}{4}$