MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Nichttechnik

Analysis und Stochastik 2

STARK

Inhalt

Autor: Reinhard Schuberth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 12. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in den nichttechnischen Ausbildungsrichtungen konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die 11. Jahrgangsstufe steht Ihnen Band 1 dieser Reihe, „Analysis und Stochastik 1“ (Stark Verlag, Best.-Nr. 92412), zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze,** die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

Ihr

Reinhard Schuberth

84. Ein Laplace-Würfel wird zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) genau dreimal eine 6 zu erhalten,

b) höchstens dreimal eine 6 zu würfeln,

c) öfter als dreimal eine 6 zu erzielen,

d) mindestens dreimal eine 6 zu erhalten?

85. In einer Familie sind vier Kinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es

a) vier Mädchen bzw. vier Jungen,

b) zwei Mädchen und zwei Jungen,

c) mindestens ein Mädchen,

d) höchstens zwei Jungen?

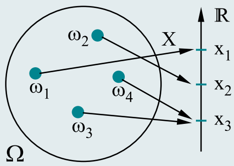
6 Zufallsgrößen und ihre Verteilung

6.1 Zufallsgrößen

In vielen Fällen möchte man den Ausgängen von Zufallsexperimenten bestimmte Zahlen zuordnen, beispielsweise den Gewinn oder Verlust, der mit dem Ausgang eines Gewinnspiels verbunden ist.

Definition

Zufallsgrößen
Vorgegeben sei ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$. Eine Zuordnungsvorschrift X, die jedem $\omega_i \in \Omega$ (für $i = 1; \ldots; n$) genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt eine **Zufallsgröße** des Zufallsexperiments. Die zugeordneten Zahlen $x_i = X(\omega_i)$ bezeichnet man als die **Zufallswerte** der Zufallsgröße.



Eine Zufallsgröße X ist also eine Funktion (oder Abbildung) der Form $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei die Elemente $\omega_i \in \Omega$ die Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind. Zufallsgrößen werden u. a. auch mit den Großbuchstaben Y oder Z bezeichnet.

Beispiele

1. Es werden zwei (unterscheidbare) Würfel geworfen. Als Zufallsgröße wird die Augensumme der beiden gewürfelten Zahlen festgelegt. Geben Sie die Zuordnung der Zufallswerte vollständig an.

   Lösung:

ω_i	X	$x_i = X(\omega_i)$
(1,1)	→	**2**
(1,2), (2,1)	→	**3**
(1,3), (2,2), (3,1)	→	**4**
(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	→	**5**
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	→	**6**
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	→	**7**
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	→	**8**
(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	→	**9**
(4,6), (5,5), (6,4)	→	**10**
(5,6), (6,5)	→	**11**
(6,6)	→	**12**
Ω		$\mathbb{R}$

   Die Zufallswerte x sind in diesem Beispiel die ganzen Zahlen 2 bis 12.

2. Eine Münze wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl an, mit der Zahl (Z) erscheint. Geben Sie die Zuordnung der Zufallswerte vollständig an.

   Lösung:
   Die Zufallswerte sind hier die Zahlen 0; 1 und 2. Die Zuordnungen sind die folgenden: X(WW) = 0; X(ZW) = X(WZ) = 1; X(ZZ) = 2.

3. Ein Glücksspiel besteht darin, eine Münze dreimal zu werfen. Für jedes erscheinende Z werden 2 € ausbezahlt. Wenn dreimal W fällt, müssen 10 € einbezahlt werden. In allen anderen Fällen erfolgt keine Zahlung. Zufallsgröße X ist der ausbezahlte Betrag (Gewinn) in €, wobei eine Einzahlung (Verlust) als negative Auszahlung zu betrachten ist.
   Geben Sie die Zuordnung der Zufallswerte tabellarisch an.

   Lösung:

ω	WWW	WWZ	WZW	ZWW	WZZ	ZWZ	ZZW	ZZZ
$X(\omega)$ in €	–10		2			4		6

Mithilfe einer Zufallsgröße können Ereignisse beschrieben werden.

Regel

Ereignisse und Zufallsgrößen

Sei Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und X eine Zufallsgröße.
Dann lassen sich durch Angaben der Form

$X = x \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega \mid X(\omega) = x\}$, mit $x \in \mathbb{R}$, oder

$X \leq x \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$ oder

$X < x \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega \mid X(\omega) < x\}$ o. ä.

Ereignisse, also Teilmengen von Ω, beschreiben.

Beispiele

1. Betrachtet wird das Zufallsexperiment „Werfen zweier Würfel" und die Augensumme als Zufallsgröße X. Wie lässt sich das Ereignis, bei dem eine Augensumme von mehr als 5 und höchstens 10 geworfen wird, durch X ausdrücken?

   Lösung:
   Man gibt das Ereignis als Ungleichungskette an:
   $6 \leq X \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega \mid 6 \leq X(\omega) \leq 10\}$

2. Eine Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsgröße X ist die „Anzahl von Z". Geben Sie folgende Ereignisse mithilfe von X an:

   a) Es wird dreimal W geworfen.

   b) Es wird mindestens einmal Z geworfen.

   c) Es wird höchstens zweimal W geworfen.

   Lösung:

   a) $X = 0$; weil dreimal W gleichbedeutend mit keinmal Z ist.

   b) $X > 0$ oder $X \geq 1$

   c) Das Ereignis ist gleichbedeutend mit „mindestens einmal Z", die Lösung ist also die gleiche wie bei Teilaufgabe b.

Aufgaben

86. In einer Urne befinden sich schwarze und weiße Kugeln. Es wird fünfmal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X ist „die Anzahl der gezogenen weißen minus die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln".
Geben Sie die Zuordnung tabellarisch an.

87. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße ist die Differenz der beiden geworfenen Augenzahlen (größere minus kleinere).
Welche Zufallswerte treten auf?

84. a) $B\left(3 \,\middle|\, 10; \frac{1}{6}\right) = 0{,}15505$

b) $\sum\limits_{k=0}^{3} B\left(k \,\middle|\, 10; \frac{1}{6}\right) = 0{,}93027$

c) Das ist das Gegenereignis von Teilaufgabe b: $P_1 = 1 - 0{,}93027 = 0{,}06973$

d) Das ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis von Teilaufgabe c vermehrt um die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Treffer erzielt werden (siehe Teilaufgabe a):
$P_2 = 0{,}15505 + 0{,}06973 = 0{,}22478$

85. a) $P_1 = 0{,}5^4 = 0{,}0625$; gleichbedeutend mit $B(4 \mid 4; 0{,}5)$

b) $B(2 \mid 4; 0{,}5) = 0{,}375$

c) Das Gegenereignis sind vier Jungen. Die Wahrscheinlichkeit dafür wurde in Teilaufgabe a bestimmt: $P_1 = 0{,}5^4$. Demnach gilt:
P(„mindestens ein Mädchen") $= 1 - 0{,}5^4 = 0{,}9375$

d) $\sum\limits_{k=0}^{2} B(k \mid 4; 0{,}5) = B(0 \mid 4; 0{,}5) + B(1 \mid 4; 0{,}5) + B(2 \mid 4; 0{,}5) = 0{,}6875$

86. Man kann fünf weiße (w) und null schwarze (s) ziehen, in diesem Fall hat X den Zufallswert 5 – 0, also 5. Zieht man vier weiße und eine schwarze, so ergibt sich 4 – 1 = 3 usw.

ω	5w0s	4w1s	3w2s	2w3s	1w4s	0w5s
X(ω)	5	3	1	–1	–3	–5

87. Bekanntlich gibt es 36 Ausgänge, wenn beide Würfel unterschieden werden. Wie viele Zufallswerte gibt es?
Bilden der Differenzen führt auf:
$1 - 1 = 2 - 2 = \ldots = 6 - 6 = \mathbf{0}$
$2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 5 - 4 = 6 - 5 = \mathbf{1}$
$3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 6 - 4 = \mathbf{2}$
$4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3 = \mathbf{3}$
$5 - 1 = 6 - 2 = \mathbf{4}$
$6 - 1 = \mathbf{5}$
Den 36 Paaren werden also die Zufallswerte 0; 1; 2; 3; 4; 5 zugeordnet.