ABITUR-TRAINING

Allgemeinbildendes Gymnasium

Stochastik

Baden-Württemberg
Abitur ab 2019

STARK

Inhalt

Vorwort

Grundlagen: Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten **1**
1 Zufallsexperimente; Relative Häufigkeiten 2
2 Wahrscheinlichkeiten 9
3 Mehrstufige Zufallsexperimente 14
4 Kombinatorische Hilfsmittel 24

Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit **33**

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen **41**

Zufallsvariablen **51**

Binomialverteilung **67**

Testen von Hypothesen **93**

Varianz und Standardabweichung **107**

Normalverteilung **117**

Anhang: Einsatz des WTR in der Stochastik **125**
1 Stochastik mit dem Casio fx-87DE X ClassWiz 126
2 Stochastik mit dem TI-30X Plus MultiView 141

Lösungen **155**

Stichwortverzeichnis **247**

Autoren:
Dr. Raimund Ordowski, Dr. Jürgen Mehnert

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die **Stochastik** ist neben den Gebieten Analysis und Geometrie Gegenstand der Abiturprüfung und hat seit dem Abitur 2017 eine deutliche Aufwertung erfahren. Ab dem Abitur 2019 ist nur noch ein wissenschaftlicher Taschenrechner **(WTR)** für die schriftliche Prüfung zugelassen.

Dieses Buch will kein Schulbuch und keinen Unterricht ersetzen. Wir haben versucht, eine möglichst gut nachvollziehbare, aber nicht zu theorielastige Wiederholung für Unterricht und Prüfung mit vielseitigen Aufgabentypen anzubieten.

Folgende Themen sind Teil der schriftlichen Abiturprüfung im Bereich Stochastik:

- Baumdiagramme, Pfadregeln
- Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert
- Binomialverteilung, Formel von Bernoulli
- Einseitiges Testen von Hypothesen

Die Kapitel, in denen diese Themen behandelt werden, bieten entsprechend umfangreiches Aufgabenmaterial. Die anderen Kapitel frischen vor allem elementare, für das Verständnis wichtige Grundkenntnisse auf oder sind zurzeit kein Prüfungsthema, wie etwa die Normalverteilung. Sie beschränken sich daher auf die wesentlichen Grundbegriffe mit wenigen Übungsaufgaben. Eine Ausnahme bildet das Kapitel über Unabhängigkeit, aus dem viele Aufgaben auch als Übungsmaterial für Prüfungen geeignet sind. Kenntnisse aus dem Abschnitt „Kombinatorische Hilfsmittel“ sind für die Prüfung von Vorteil, zumindest einfache kombinatorische Überlegungen werden dort erwartet.

Das Buch ist so konzipiert, dass Sie auf verschiedene Weise damit arbeiten können, um sich optimal auf die Abiturprüfung vorzubereiten:

- Jedes Kapitel beginnt mit einem **einführenden Beispiel**, anhand dessen Ihnen die wichtigsten Begriffe und Regeln ohne große Theorie in Erinnerung gerufen bzw. verdeutlicht werden.
- Vielleicht benötigen Sie aber auch nur die anschließende **Zusammenfassung** der Theorie, die mit einer oder mehreren **Musteraufgaben** erläutert wird. Dann können Sie auch damit einsteigen.
- Sind Ihnen die wichtigsten Begriffe bereits vertraut, so bieten die **Übungsaufgaben** zu jedem Kapitel Trainingsmaterial mit steigendem Schwierigkeitsgrad. Die Formulierungen und Fragestellungen in den Aufgaben entsprechen weitgehend den Vorgaben für die Aufgaben der Abiturprüfung. Geeignete Aufgaben, die ganz oder teilweise im Pflichtteil des Abiturs auftreten könnten, die also ohne Hilfsmittel bearbeitet werden müssen, sind mit einem **P** gekennzeichnet. Die Grenzen zwischen Pflicht- und Wahlteil zur Stochastik im Abitur sind allerdings fließend. Grundsätzlich sind Aufgaben, zu deren Lösung der WTR benötigt wird, nur im Wahlteil des Abiturs möglich.

- Zu allen Aufgaben gibt es im Lösungsteil ausführliche **Lösungen**, mit denen Sie Ihre eigenen Überlegungen und Berechnungen vergleichen und kontrollieren können.
- Der letzte Teil des Buches umfasst ausführliche Anleitungen für die zwei gängigen WTR-Modelle **Casio fx-87DE X ClassWiz** und **TI-30X Plus MultiView** für die grundlegenden Aufgabentypen der Stochastik. Bei allen Lösungen von Aufgaben der vorangegangenen Kapitel, die den Einsatz des WTR benötigen, wird auf den entsprechenden Aufgabentyp aus diesem **WTR-Teil** verwiesen, sodass Sie den WTR stets gezielt einsetzen können.
  Der WTR-Teil kann aber auch für sich genutzt werden, um den Umgang mit dem Taschenrechner zu üben, wenn Ihnen die Theorie bereits vertraut ist.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Dr. Raimund Ordowski Dr. Jürgen Mehnert

3 Mehrstufige Zufallsexperimente

Einführendes Beispiel

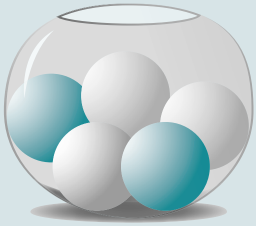
In einem Gefäß befinden sich zwei grüne und drei weiße Kugeln. Aus dem Gefäß wird zweimal eine Kugel gezogen und jeweils gleich wieder zurückgelegt.

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: Beide Kugeln sind weiß.

B: Eine Kugel ist grün, die andere weiß.

C: Mindestens eine Kugel ist grün.

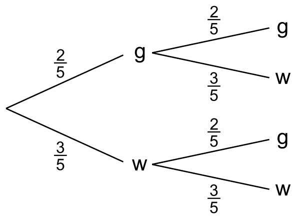


Baumdiagramm; Pfadregeln

Das beschriebene Zufallsexperiment ist **zweistufig**, da es sich aus der ersten und der zweiten Ziehung einer Kugel zusammensetzt. Da die gezogene Kugel nach dem ersten Zug zurückgelegt wird, spricht man von **Ziehen mit Zurücklegen**.

Wenn g das Ziehen einer grünen Kugel und w das Ziehen einer weißen Kugel bedeutet, dann lauten die vier möglichen Ergebnisse (g; g), (g; w), (w; g) und (w; w).

Das Zufallsexperiment lässt sich übersichtlich mithilfe eines **Baumdiagramms** darstellen. Die Äste des Baumdiagramms werden mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit **eines Ergebnisses** berechnet sich, indem die Wahrscheinlichkeiten längs des **zugehörigen Pfades multipliziert** werden.



Zum Ereignis
A: Beide Kugeln sind weiß.
gehört nur der eine Pfad mit dem Ergebnis (w; w). Folglich gilt:

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

B: Eine Kugel ist grün, die andere weiß.
B setzt sich aus den **zwei Ergebnissen** (g; w) und (w; g) zusammen.
Die Wahrscheinlichkeiten der **entsprechenden Pfade** werden **addiert**:

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

Für das Ereignis
C: Mindestens eine Kugel ist grün.
ergibt sich anhand der drei Pfade mit den Ergebnissen (g; g), (g; w) und (w; g):

$$P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{16}{25}$$

Alternativ kann man die Wahrscheinlichkeit für C mithilfe des Gegenereignisses
$\overline{C}$: Keine Kugel ist grün.
berechnen, das aber gerade mit dem Ereignis A: „Beide Kugeln sind weiß" übereinstimmt. Daher ist:

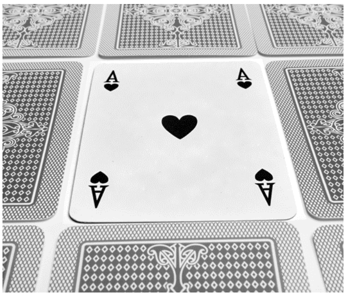
$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Zusammenfassung

Bei **mehrstufigen Zufallsexperimenten** lassen sich die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mithilfe von **Baumdiagrammen** berechnen. Dabei gilt:

- **1. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades **multipliziert**.
- **2. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich, indem man die Pfadwahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse **addiert**.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist jeweils 1.

Musteraufgabe



Auf einem Tisch werden zehn verdeckte Spielkarten zufällig verteilt. Darunter sind vier Damen und sechs Asse.

a) Es werden zwei Karten nacheinander aufgedeckt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   E: Es werden zwei Damen aufgedeckt.
   F: Die erste aufgedeckte Karte ist eine Dame, die zweite ein Ass.
   G: Es wird genau eine Dame aufgedeckt.
   H: Es wird mindestens eine Dame aufgedeckt.

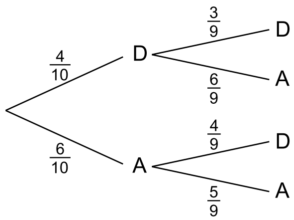
b) Es werden so lange Karten nacheinander aufgedeckt, bis man zwei Damen erhalten hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies spätestens mit der dritten Karte der Fall ist.

c) Erläutern Sie ohne Rechnung, wie viele Karten man mindestens aufdecken muss, damit mit Sicherheit
   - zwei Damen,
   - zwei Damen oder zwei Asse

   dabei sind.

d) Auf dem Tisch werden jetzt sechs Asse und n Damen zufällig verteilt. Es werden wieder zwei Karten nacheinander aufgedeckt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Dame darunter ist, beträgt nun $\frac{1}{7}$. Berechnen Sie n.

Lösung a) Da die Karten nacheinander aufgedeckt werden, liegen beim ersten Zug 10 Karten, beim zweiten Zug nur noch 9 Karten verdeckt auf dem Tisch. Das Aufdecken der Karten nacheinander entspricht dem zweifachen Ziehen einer Kugel aus einer Urne, wobei die zuerst gezogene Kugel <u>nicht</u> zurückgelegt wird (**Ziehen ohne Zurücklegen**). Da beim zweiten Aufdecken nur noch 9 Karten zur Verfügung stehen, ändern sich nun die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumdiagramms:



Dabei bezeichnet D das Ziehen einer Dame, A das Ziehen eines Asses.

Mithilfe der Pfadregeln erhält man die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

E: Es werden zwei Damen aufgedeckt.

$$P(E) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}_{D\,D} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

F: Die erste aufgedeckte Karte ist eine Dame, die zweite ein Ass.

$$P(F) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}_{D\,A} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

G: Es wird genau eine Dame aufgedeckt.
Die Dame kann entweder im ersten oder im zweiten Zug gezogen werden.

$$P(G) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}_{D\,A} + \underbrace{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}}_{A\,D} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

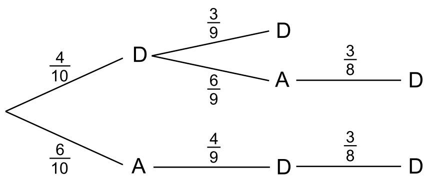
H: Es wird mindestens eine Dame aufgedeckt.
Zum Ereignis H gehören drei der vier Pfade:

$$P(H) = \underbrace{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}_{D\,D} + \underbrace{\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}}_{D\,A} + \underbrace{\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}}_{A\,D} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Deutlich einfacher ist es hingegen, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses H mithilfe des Gegenereignisses
$\overline{H}$: Es wird keine Dame aufgedeckt.
zu bestimmen, da zu diesem Ereignis nur ein einziger Pfad gehört:

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \underbrace{\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}}_{A\,A} = 1 - \frac{30}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

b) Das Zufallsexperiment hat nun eine unbekannte Anzahl an Stufen, da man nicht vorher weiß, wie oft man ziehen muss, um zwei Damen zu erhalten. Um das Baumdiagramm möglichst übersichtlich zu halten, werden nur die für die Fragestellung relevanten Pfade gezeichnet:



Anhand dieses **reduzierten Baumdiagramms** erhält man für das Ereignis
Z: Zwei Damen mit spätestens der dritten aufgedeckten Karte.
die Wahrscheinlichkeit:

$$P(Z) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

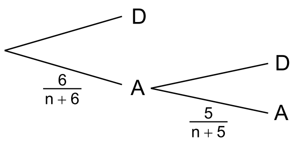
c) Im ungünstigsten Fall erhält man zunächst alle sechs Asse und eine Dame, bevor die zweite Dame aufgedeckt wird. Daher muss man mindestens acht Karten aufdecken, damit mit Sicherheit zwei Damen darunter sind.

Spätestens bei der dritten aufgedeckten Karte erhält man zwei gleichartige Karten (Asse oder Damen), da nur Damen und Asse auf dem Tisch liegen.

d) Auf dem Tisch liegen jetzt 6 Asse und n Damen, insgesamt also $n+6$ Karten. Das Ereignis
K: Es wird keine Dame aufgedeckt.
ist gleichbedeutend damit, dass genau zwei Asse aufgedeckt werden.

Anhand des reduzierten Baumdiagramms ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für K:

$$P(K) = \frac{6}{n+6}\cdot\frac{5}{n+5}$$



Aus der Vorgabe $P(K) = \frac{1}{7}$ ergibt sich für n:

$$\frac{30}{(n+6)\cdot(n+5)} = \frac{1}{7}$$

$$30\cdot 7 = (n+6)\cdot(n+5)$$

$$210 = n^2 + 11n + 30$$

$$0 = n^2 + 11n - 180$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man

$$n_{1;\,2} = -5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 + 180} = -5{,}5 \pm \sqrt{210{,}25} = -5{,}5 \pm 14{,}5$$

und damit:

$n_1 = 9;\;\; n_2 = -20$

Die relevante Lösung ist $n = 9$.

Alternativ erhält man durch systematisches Probieren mit dem WTR für

$n = 4$: $P(K) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$n = 5$: $P(K) = \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{3}{11}$

…

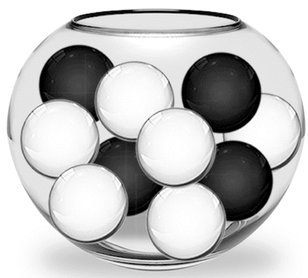
$n = 9$: $P(K) = \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14} = \frac{1}{7}$

Da die Wahrscheinlichkeit für K mit wachsendem n immer kleiner wird, ist $n = 9$ die einzige Lösung.

Es liegen neun Damen (und sechs Asse) verdeckt auf dem Tisch.

Übungsaufgaben

P 8 In einer Urne befinden sich vier schwarze und sechs weiße Kugeln.



a) Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben.

b) Es werden nun nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist.

Übungsaufgaben

P 87 Das abgebildete Glücksrad hat fünf gleich große Sektoren. In der Urne liegen fünf weiße, drei schwarze und zwei grüne Kugeln.
Entscheiden Sie für die angegebenen Fälle jeweils, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt. Geben Sie falls möglich deren Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p an.

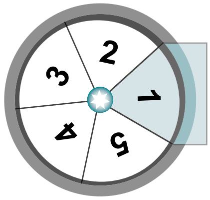
a) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht und es wird jedes Mal notiert, ob die Zahl 1 oder die Zahl 2 erscheint.

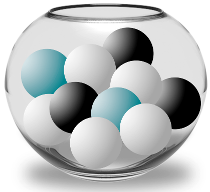
b) Das Glücksrad wird achtmal gedreht und jedes Mal wird die erschienene Zahl notiert.

c) Aus der Urne wird fünfmal eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen und es wird jedes Mal notiert, ob die Kugel weiß ist.

d) Aus der Urne wird viermal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und es wird jedes Mal notiert, ob die Kugel schwarz ist.

e) Aus der Urne wird 20-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und es wird jedes Mal notiert, ob die Kugel weiß oder grün oder keines von beiden ist.





P 88 Es ist bekannt, dass 15 % aller Smartphones vom Hersteller A stammen.
Bei einer Umfrage in einer Großstadt werden 100 zufällig ausgewählte Personen befragt, ob sie ein Smartphone von A besitzen.
Kann man von einer Bernoulli-Kette ausgehen?

P 89 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 4$ und $p = \frac{1}{3}$.
Bestimmen Sie mithilfe der Bernoulli-Formel die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Berechnen Sie den Erwartungswert von X sowie $P(X \neq 1)$.

90 Die Zufallsvariable X ist $B_{20;\,0{,}4}$-verteilt.

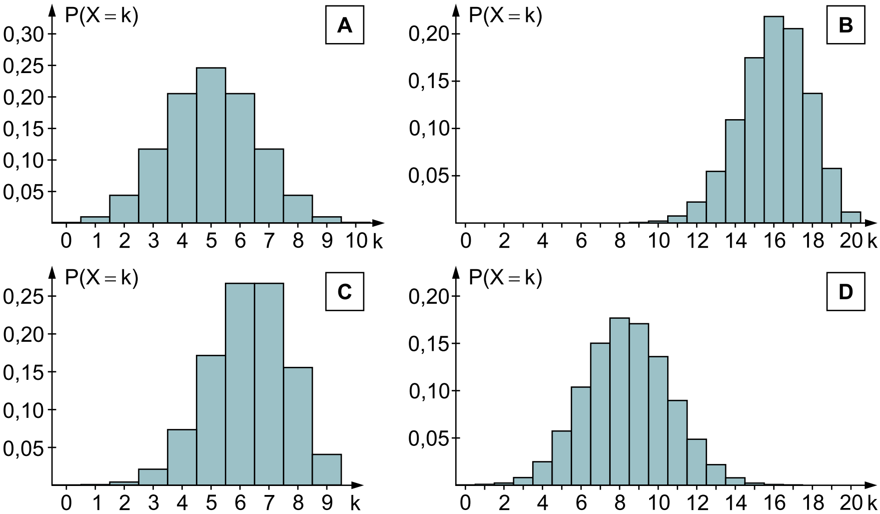
a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Bestimmen Sie mit dem WTR folgende Wahrscheinlichkeiten:

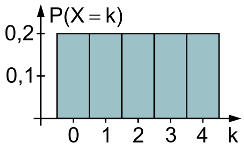
(1) $P(X = 10)$ (2) $P(X \neq 9)$ (3) $P(X \leq 10)$
(4) $P(X \geq 8)$ (5) $P(7 \leq X \leq 16)$

P 91 Auf vier der sieben Kärtchen befinden sich die Parameter der dargestellten Binomialverteilungen. Ordnen Sie jedem Histogramm die passenden Parameter zu und begründen Sie jeweils Ihre Auswahl.

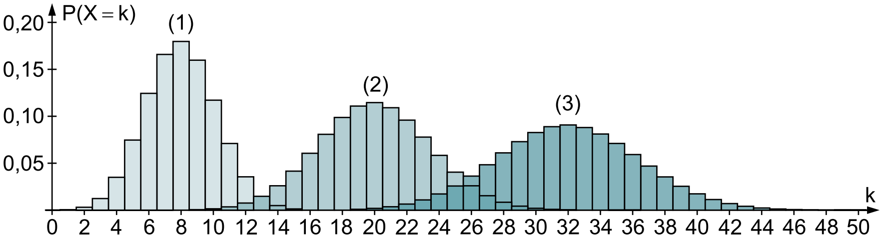
(1) $n=10$; $p=0{,}5$	(3) $n=20$; $p=0{,}6$	(5) $n=20$; $p=0{,}42$	(7) $n=9$; $p=0{,}8$
(2) $n=10$; $p=0{,}4$	(4) $n=20$; $p=0{,}8$	(6) $n=9$; $p=0{,}7$	



P 92 Begründen Sie, dass das abgebildete Histogramm nicht zu einer binomialverteilten Zufallsvariablen X gehören kann.



P 93 Die Histogramme beschreiben Binomialverteilungen mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p=0{,}4$. Die Erwartungswerte sind jeweils ganzzahlig.



Bestimmen Sie jeweils den Parameter n.
Beschreiben Sie, wie sich die Histogramme von Binomialverteilungen mit wachsendem n bei gleichem p verändern.

b) Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert für den Gewinn von Felix 0 ist:

$$E(X) = 0$$
$$p - 3p^2 = 0$$
$$p \cdot (1 - 3p) = 0$$
$$p_1 = 0; \ \ p_2 = \tfrac{1}{3}$$

Da $p > 0$ sein muss, ist das Spiel für $\mathbf{p = \frac{1}{3}}$ fair.

Für den Mittelpunktswinkel bei A gilt in diesem Fall: $\frac{1}{3} \cdot 360^\circ = \mathbf{120^\circ}$

Der Erwartungswert für den Gewinn von Felix beträgt –0,25 € pro Spiel, wenn gilt:

$$E(X) = -0{,}25$$
$$p - 3p^2 = -0{,}25$$
$$0 = 3p^2 - p - 0{,}25$$
$$p_{3;\,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 0{,}25}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 2}{6}$$
$$\left(p_3 = -\tfrac{1}{6}\right); \ \ p_4 = \tfrac{1}{2}$$

Für $\mathbf{p = \frac{1}{2}}$ würde Felix auf lange Sicht im Mittel 25 Cent pro Spiel verlieren.

87 a) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor; Treffer: „Zahl 1 oder Zahl 2“.
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{2}{5}$ Länge: $n = 10$

b) **Keine** Bernoulli-Kette, da kein Treffer definiert ist.

c) **Keine** Bernoulli-Kette, denn beim Ziehen ohne Zurücklegen ändert sich bei jeder Entnahme einer Kugel die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „weiße Kugel“ für den nächsten Zug. D. h., die einzelnen Ziehungen sind nicht unabhängig.

d) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor; Treffer: „schwarze Kugel“.
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{3}{10}$ Länge: $n = 4$

e) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor; Treffer: „weiße oder grüne Kugel“.
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{7}{10}$ Länge: $n = 20$

88 Die zugrunde liegende Situation entspricht der aus Aufgabe 87 c:
Es werden 100 Personen aus der Gesamtheit der Einwohner der Stadt „ohne Zurücklegen“ ausgewählt, denn jede Person wird nur einmal befragt. Dabei ändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person ein Smartphone von A besitzt, mit jeder Person, die befragt wird.

Da aber die Stichprobe vom Umfang 100 sehr klein ist im Vergleich zur gesamten Einwohnerzahl einer Großstadt, ist diese Änderung sehr gering und vernachlässigbar. Durch die zufällige Auswahl der Personen kann man zusätzlich davon ausgehen, dass die Ergebnisse der Befragungen unabhängig voneinander sind.
Man kann daher in guter Näherung eine Bernoulli-Kette annehmen.

Treffer: „besitzt Smartphone von A“
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = 0{,}15$ Länge: $n = 100$

89 Die Zufallsvariable X ist $B_{4;\frac{1}{3}}$-verteilt. Für die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X erhält man nach der Bernoulli-Formel mit $p = \frac{1}{3}$ und $q = 1 - p = \frac{2}{3}$:

$$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{81} \cdot 1 = \frac{1}{81}$$

In Tabellenform:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Erwartungswert von X:
$\mathbf{E(X)} = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

Wahrscheinlichkeit:
$\mathbf{P(X \neq 1)} = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{32}{81} = \mathbf{\frac{49}{81}}$

90 Die Zufallsvariable X ist $B_{20;\,0{,}4}$-verteilt.

a) Erwartungswert von X:
$\mathbf{E(X)} = 20 \cdot 0{,}4 = \mathbf{8}$

b) Mit dem WTR erhält man:
→ WTR 7/8
(1) $P(X = 10) \approx 0{,}1171$
(2) $P(X \neq 9) = 1 - P(X = 9) \approx 0{,}8403$
(3) $P(X \leq 10) \approx 0{,}8725$

(4) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}5841$

(5) $P(7 \leq X \leq 16) = P(X \leq 16) - P(X \leq 6) \approx 0{,}7499$

91 Die Erwartungswerte bei den vorgeschlagenen Parametern wären:

(1) $n = 10;\ p = 0{,}5$: $\mu = 10 \cdot 0{,}5 = 5$

(2) $n = 10;\ p = 0{,}4$: $\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

(3) $n = 20;\ p = 0{,}6$: $\mu = 20 \cdot 0{,}6 = 12$

(4) $n = 20;\ p = 0{,}8$: $\mu = 20 \cdot 0{,}8 = 16$

(5) $n = 20;\ p = 0{,}42$: $\mu = 20 \cdot 0{,}42 = 8{,}4$

(6) $n = 9;\ p = 0{,}7$: $\mu = 9 \cdot 0{,}7 = 6{,}3$

(7) $n = 9;\ p = 0{,}8$: $\mu = 9 \cdot 0{,}8 = 7{,}2$

Für die weitere Lösung vergleicht man die Maximalstellen der Histogramme mit diesen Erwartungswerten. Zur Erinnerung: Eine Maximalstelle einer Binomialverteilung weicht um weniger als 1 vom Erwartungswert ab. Ist der Erwartungswert ganzzahlig, so stimmt er mit der Maximalstelle überein.

Histogramm A:
Das Maximum des Histogramms liegt bei $k = 5$. Von den berechneten Erwartungswerten kommt daher nur $\mu = 5$ infrage.
Zu A gehören die Parameter (1) $n = 10$ und $p = 0{,}5$.

Histogramm B:
Das Maximum des Histogramms liegt bei $k = 16$, der Erwartungswert kann daher nur $\mu = 16$ sein. Somit gilt:
Zu B gehören die Parameter (4) $n = 20$ und $p = 0{,}8$.

Histogramm C:
Das Maximum des Histogramms wird an den beiden Stellen $k_1 = 6$ und $k_2 = 7$ angenommen, der Erwartungswert muss dazwischenliegen. Dies gilt nur für $\mu = 6{,}3$.
Zu C gehören die Parameter (6) $n = 9$ und $p = 0{,}7$.

Anmerkung:
Gilt für den Erwartungswert μ und die Trefferwahrscheinlichkeit p einer Binomialverteilung, dass $\mu + p$ ganzzahlig ist (wie in diesem Fall $\mu + p = 6{,}3 + 0{,}7 = 7$), so nimmt die Binomialverteilung ihr Maximum an zwei benachbarten Stellen an. Der Erwartungswert μ liegt dazwischen.

Histogramm D:
Das Maximum des Histogramms liegt bei $k = 8$. Der Abbildung entnimmt man, dass nur $n = 20$ infrage kommt. Der Erwartungswert muss daher $\mu = 8{,}4$ sein.
Zu D gehören die Parameter (5) $n = 20$ und $p = 0{,}42$.