

2021

G9 Abitur

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Niedersachs

Mathematik eA

- + Übungsaufgaben
- + Infos zum Inhalt der neuen Klausur
- + Lernvideos zur GTR/CAS-Nutzung

ActiveBook
• Interaktives
Training



STARK

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1	Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung	I
2	Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase	III
3	Bewertung der Prüfungsarbeiten	VI
4	Operatoren in zentralen Prüfungsaufgaben Mathematik	VII
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung ...	XII
6	Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern ..	XIII
7	Weiterführende Informationen	XX

Übungsaufgaben zum Pflichtteil

Analysis	1
Stochastik	3
Analytische Geometrie	4
Lösungsvorschlag	5

Übungsaufgaben zum Wahlteil

Analysis

Übungsaufgabe 1: Faulgas (100 Min., CAS)	16
Übungsaufgabe 2: Temperaturen in Friesoythe (100 Min., CAS)	22
Übungsaufgabe 3: Kantig und rund (100 Min., CAS)	30

Fortsetzung siehe nächste Seite

Übungsaufgabe 4: Perlenkette und Hochspannungsleitung (100 Min., CAS) ...	35
Übungsaufgabe 5: Zauberbohnen (100 Min., CAS)	40
Stochastik	
Übungsaufgabe 1: Gewicht von Puten (50 Min., GTR/CAS)	45
Übungsaufgabe 2: Sehbeteiligung (50 Min., GTR/CAS)	49
Übungsaufgabe 3: Dopingtest (50 Min., GTR/CAS)	53
Übungsaufgabe 4: Datenanalyse (50 Min., CAS)	57
Analytische Geometrie	
Übungsaufgabe 1: Ölbohrinsel (50 Min., GTR/CAS)	62
Übungsaufgabe 2: Die Pyramide des Pharao (50 Min., GTR/CAS)	66
Übungsaufgabe 3: Atommodell (50 Min., CAS)	70
Übungsaufgabe 4: Im Bergwerk (50 Min., CAS)	75

Original-Abituraufgaben

Abiturprüfung 2016

Pflichtteil	2016-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS – Analysis	2016-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS – Analysis	2016-16
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2016-25
Aufgabe 2B – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2016-30
*Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2016-36
Aufgabe 3B – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2016-41

Abiturprüfung 2017

Pflichtteil	2017-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS – Analysis	2017-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS – Analysis	2017-14
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2017-23
Aufgabe 2B – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2017-29
Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2017-34
Aufgabe 3B – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2017-40

Die mit einem * markierte Aufgabe ist aufgrund von Lehrplanänderungen für das Abitur ab 2017 nicht relevant.

Abiturprüfung 2018

Pflichtteil	2018-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS – Analysis	2018-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS – Analysis	2018-17
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2018-26
Aufgabe 2B – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2018-33
Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2018-39
Aufgabe 3B – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2018-43

Abiturprüfung 2019

Pflichtteil	2019-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS – Analysis	2019-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS – Analysis	2019-14
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2019-24
Aufgabe 2B – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2019-30
Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2019-37
Aufgabe 3B – Rechnertyp: CAS – Geometrie/Algebra	2019-45



Bei MyStark finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autoren

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2019)

Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2019)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2021 im Erhöhten Anforderungsniveau in Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Erhöhte Anforderungsniveau viele Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2021** sowie zum **Pflichtteil**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2016 bis 2019**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
 - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
 - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
 - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019**, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscodes zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Josef Rolfs



Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen, einem **Pflichtteil**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist (auch länderübergreifende Aufgaben), und einem **Wahlteil**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann (Niedersachsen-spezifische Aufgaben).

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Pflichtteil** werden Ihnen zum einen **vier Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie/Lineare Algebra vorgelegt, die länderübergreifend gestellt werden. Hinzu kommen Niedersachsen-spezifisch **ein oder zwei weitere Aufgaben**. Die Aufgaben dieses Pflichtteils sind etwa gleichgewichtet und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.

Im **Wahlteil** werden Ihnen drei Aufgabenblöcke mit jeweils zwei Aufgaben A und B vorgelegt. Der Aufgabenblock 1 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis (Aufgabe 1A bzw. 1B), der Aufgabenblock 2 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Stochastik (Aufgabe 2A bzw. 2B) und der Aufgabenblock 3 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Aufgabe 3A bzw. 3B). Sie müssen aus jedem der drei Blöcke jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.

Die Gewichtung der drei Aufgabenblöcke erfolgt etwa im Verhältnis 2:1:1. Somit wird im Wahlteil die Analysisaufgabe (Aufgabenblock 1) mit einem Anteil von etwa 50 % am stärksten gewichtet. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

	Block 1	Block 2	Block 3
Aus jedem Block muss genau eine Aufgabe bearbeitet werden.	Aufgabe 1A (Analysis)	Aufgabe 2A (Stochastik)	Aufgabe 3A (Geometrie/Algebra)
	Aufgabe 1B (Analysis)	Aufgabe 2B (Stochastik)	Aufgabe 3B (Geometrie/Algebra)
Gewichtung	2	1	1

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit für den Pflichtteil beträgt 70 Minuten und für den Wahlteil 200 Minuten. Hinzu kommen für den Wahlteil 30 Minuten Auswahlzeit.

Nach Ablauf der Bearbeitungszeit des Pflichtteils müssen Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben für den Wahlteil, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen Sie die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.
- Vernetzte Rechner sind in der Abiturprüfung nicht zugelassen.

Weiter sind zur Abiturprüfung gedruckte **Formelsammlungen** der Schulbuchverlage und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

Übungsaufgabe 2 (100 Min., CAS)

Temperaturen in Friesoythe

Die Monatsmitteltemperaturen von Friesoythe seien durch die folgende Tabelle gegeben.

Monat	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Mitteltemperatur (in °C)	1,3	1,9	4,6	8,1	12,8	15,9	17,3	16,9	13,9	10,0	5,4	2,5

- a) Für eine vereinfachte Modellierung des Jahresverlaufs werde angenommen, dass jeder Monat 30 Tage hat und die Monatsmitteltemperatur jeweils am 15. eines Monats exakt erreicht wird. Somit ergibt sich eine Wertetabelle mit 360 Wertepaaren, von denen 12 bekannt sind.

Tag des Jahres	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345
Temperatur	1,3	1,9	4,6	8,1	12,8	15,9	17,3	16,9	13,9	10,0	5,4	2,5

Ermitteln Sie als Modell eine Sinuskurve, die exakt durch den Hochpunkt und durch den Tiefpunkt der Daten geht. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise. Ermitteln Sie mithilfe der Funktion die mittlere Temperatur im Juli und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

- b) Für eine andere Klimastation sei die Modellierung der Klimadaten gegeben durch f mit dem Funktionsterm $f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9$, wobei x den Tag des Jahres angibt (bei 360 Tagen im Jahr).

Ermitteln Sie die Tage mit maximaler Änderungsrate sowie die Tage mit Extremtemperaturen und skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgrund von Umweltbeobachtungen erwartet man, dass die Temperaturschwankungen jährlich um $0,07^\circ\text{C}$ zunehmen und die Temperatur jährlich um $0,5\%$ zunimmt.

Bestimmen Sie den Term $g(x)$, der für die durch f beschriebene Station diese Annahmen berücksichtigt.

Ermitteln Sie aufgrund dieser Annahmen die theoretisch erwartete Jahresmitteltemperatur in 100 Jahren sowie die maximale und minimale Temperatur in 100 Jahren.

- c) Claudia hat festgestellt, dass in der ersten Tabelle die Daten von April bis August auf dem Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades liegen.

Ermitteln Sie den Term dieser Funktion h .

Der Graph einer weiteren ganzrationalen Funktion soll die Daten von September bis Oktober darstellen und an den Graphen von h stetig und differenzierbar anschließen.

Bestimmen Sie auch diesen Funktionsterm.

Lösungsvorschlag

a) Ermitteln des Modells und Beschreiben der Vorgehensweise:

A tag	B temp	C
=seq(15+30*i,i,0,11)		
1	15	1.3
2	45	1.9
3	75	4.6
4	105	8.1
5	135	12.8



Mit der Reduzierung des Jahres auf 360 Tage kann man von einer Sinusfunktion mit der Periode $\frac{2\pi}{360}$ ausgehen.

Das Maximum der Daten liegt bei H(195 | 17,3) und das Minimum liegt bei T(15 | 1,3).

Wenn die Sinuskurve in H ihr Maximum und in T ihr Minimum erreichen soll, dann gilt für die Amplitude a:

$$a = \frac{1}{2}(17,3 - 1,3) = 8$$

Die vertikale Verschiebung d errechnet sich aus dem Mittelwert von Maximal- und Minimalwert:

$$d = \frac{1}{2}(17,3 + 1,3) = 9,3$$

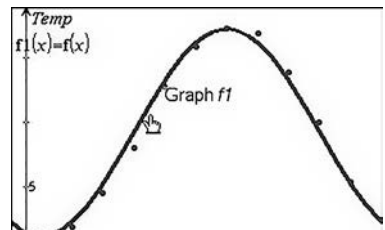
Für die horizontale Verschiebung c betrachtet man die Extremstellen. Bei 90 hätte der Sinus im Gradmaß sein Maximum, also muss die Kurve um 105 nach rechts verschoben werden, damit das Maximum bei H liegt.

Es folgt für den Term der Sinusfunktion:

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (x - 105)\right) + 9,3$$

Der Graph wird zusammen mit den Daten gezeichnet.

$\frac{17,3-1,3}{2} \rightarrow a$	8
$\frac{17,3+1,3}{2} \rightarrow d$	$\frac{93}{10}$
$\frac{2 \cdot \pi}{360} \rightarrow b$	$\frac{\pi}{180}$
$-105 \rightarrow c$	-105
$a \cdot \sin(b \cdot (x+c)) + d \rightarrow f(x)$	Fertig
$f(x)$	$8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot (x-105)}{180}\right) + \frac{93}{10}$



Bestimmen des Mittelwertes im Juli:

Der Juli umfasst 30 Tage zwischen 180 und 210. Den Mittelwert M erhält man durch das Integral:

$$A = \frac{1}{30} \cdot \int_{180}^{210} f(x) \, dx \approx 17,21$$

$\frac{1}{30} \int_{180}^{210} f(x) \, dx$	17.2089
--	---------

Erläutern des Ergebnisses:

Obwohl der Graph von f exakt durch den Hochpunkt $(195 | 17,3)$ geht, erhält man durch Integration eine andere Monatsmitteltemperatur. Sie liegt niedriger als der vorgegebene Wert. Sie muss auch niedriger sein, weil alle anderen Sinuswerte niedriger als das Maximum sind. Wie schon der Verlauf der Datenpunkte vermuten lässt, ist also die oben genannte Modellannahme falsch, dass genau in der Mitte des Monats Juli das Maximum liegt. Da die Mitteltemperatur des Monats August höher liegt als die des Monats Juni, wird das wahre Maximum erst in der zweiten Julihälfte angenommen.

b) Ermitteln der Tage mit maximaler Temperaturänderung und Extremtemperaturen:

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9$$

$$f'(x) = -\frac{2\pi}{45} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$f''(x) = \frac{\pi^2}{4050} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4050} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 120 \vee x = 300$$

Es gilt:

$$f'(0) \approx -0,07$$

$$f'(120) \approx 0,14$$

$$f'(300) \approx -0,14$$

$$f'(360) \approx -0,07$$

Daher steigt die Temperatur am 120. Tag des Jahres (30. April) am stärksten und sinkt am 300. Tag (30. Oktober) am stärksten.

$8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9 \rightarrow f(x)$	Fertig
$\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow f_s(x)$	Fertig
$\frac{d}{dx}(f_s(x)) \rightarrow f_{ss}(x)$	Fertig
$f_s(x)$	$\frac{-2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{180} + \frac{\pi}{3}\right)}{45}$
$f_{ss}(x)$	$\frac{\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{180} + \frac{\pi}{3}\right)}{4050}$
$\text{solve}(f_{ss}(x)=0, x) 0 \leq x \leq 360$ $x=120$ or $x=300$	
$f_s(0)$	-0.069813
$f_s(120)$	0.139626
$f_s(300)$	-0.139626
$f_s(360)$	-0.069813

Wahlteil (CAS) – Aufgabe 1 B

Für die Gartenschau „Mathematischer Garten“ wird die Gestaltung einer quadratischen Gartenfläche geplant. Diese soll durch einen Weg in eine Blumenfläche und eine Sträucherfläche aufgeteilt werden. Die Blumenfläche liegt nördlich des Weges. In der Planungsphase werden verschiedene Modelle der Gartenfläche mit einer Seitenlänge von einem Meter (m) hergestellt. Der Weg wird dabei modellhaft durch Funktionsgraphen beschrieben. Alle zu berechnenden Größen beziehen sich auf die jeweiligen Modelle.

Punkte

- a) Im ersten Modell soll der Weg durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

beschrieben werden.

Dabei werden x und $f(x)$ jeweils in Metern angegeben. Das entsprechende Modell ist in Abbildung 1 dargestellt.

Weisen Sie nach, dass der Weg durch zwei Ecken des quadratischen Modells verläuft.

Untersuchen Sie, ob der Weg die Gartenfläche in zwei flächeninhaltsgleiche Stücke teilt.

Auf dem Weg von der westlichen zur östlichen Grenze der Gartenfläche gibt es zwei Punkte, an denen man genau in Richtung Osten läuft, und einen Punkt, an dem man von einer Rechtskurve in eine Linkskurve wechselt.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser drei Punkte.

11

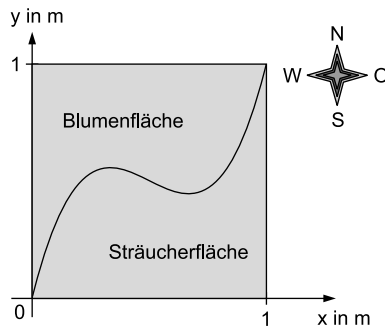


Abbildung 1

- b) Für das Modell aus Teilaufgabe a soll ein Streifen der Blumenfläche mit rotblühenden Blumen bepflanzt werden. Das hierzu ausgewählte Teilstück ist in der Abbildung 2 grafisch dargestellt. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

Am Punkt $B(0,6|0,7)$ soll eine Bewässerungsanlage aufgestellt werden, die um ihren Standort B ein kreisförmiges Gebiet mit einem Radius von 0,25 m bewässert.

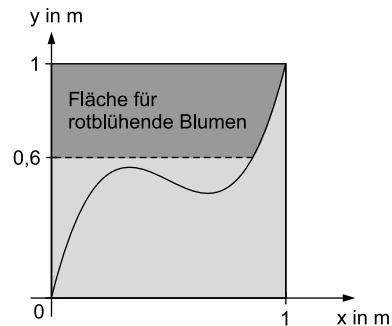


Abbildung 2

Teilaufgabe a

Nachweisen, dass der Weg durch zwei Ecken geht

Offenbar geht der Graph von f durch $A(0|0)$ und $B(1|1)$.

Dieses ist hier nachzuweisen.

Untersuchen des Flächenstücks

Die Maßzahl der Sträucherfläche kann mithilfe eines Integrals ermittelt werden.

Beachten Sie, dass das Quadrat die Maßzahl 1 besitzt.

Dadurch können Sie die beiden Teilflächen miteinander vergleichen.

Berechnen der drei Punkte

Stellen Sie sich vor, dass Sie den Weg durch den Garten gehen.

Dabei erkennen Sie sicher, um welche besonderen Punkte des Graphen es sich handelt.

Bei einer waagerechten Tangente geht man Richtung Osten.

Mit dem Rechner (oder auch ohne) können Sie diese Punkte schnell ermitteln.

Der dritte Punkt ist der Wendepunkt des Graphen.

Teilaufgabe b

Bestimmen des Flächeninhaltes

Durch Ergänzen oder auch durch Aufteilen der markierten Fläche erhalten Sie ein Rechteck.

Auf jeden Fall benötigen Sie die Stelle, an der $f(x)$ den Wert 0,6 annimmt.

Mit dem Rechner lässt sich diese Stelle näherungsweise bestimmen.

Die Maßzahl des Rechtecks kann bestimmt werden.

Zusätzlich benötigen Sie noch die Maßzahl der anderen Teilfläche, hier hilft ein Integral weiter.

Geben Sie zum Schluss die Maßzahl der Fläche in m^2 an.

Untersuchen, ob der Wegpunkt W nass wird

Es wird kein Punkt beregnet, der von B weiter als 0,25 m entfernt liegt.

Bestimmen Sie die Entfernung des Punktes W von B .

Nutzen Sie dabei den Satz des Pythagoras.

Machen Sie mit dem Resultat zum Schluss eine Aussage.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (CAS) – Aufgabe 1 B

a) Nachweisen, dass der Weg durch zwei Ecken geht:

$$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x$$

A(0 | 0) und B(1 | 1) müssen auf dem Graphen von f liegen.

Wegen $f(0) = 0$ und $f(1) = 6 - 9 + 4 = 1$ ist dies der Fall.

Untersuchen des Flächenstücks:

Die gesamte Fläche ist 1 m^2 groß.

Damit der Weg die Fläche in zwei gleich große Flächen teilt, müsste das untere

Teilstück $0,5 \text{ m}^2$ groß sein.

$$A_{\text{unten}} = \int_0^1 f(x) \, dx \stackrel{\text{CAS}}{=} \frac{1}{2}$$

Also ist die Aussage richtig.

Berechnen der drei Punkte:

Wenn der Graph eine waagerechte Tangente aufweist, geht man genau nach Osten.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 18x + 4 = 0$$

$$\stackrel{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{2}{3}$$

Für die y-Koordinaten der Punkte gilt:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Also geht man in $P_1\left(\frac{1}{3} \mid \frac{5}{9}\right)$ und $P_2\left(\frac{2}{3} \mid \frac{4}{9}\right)$ genau nach Osten.

Im Wendepunkt des Graphen wechselt man von einer Rechts- in eine Linkskurve.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Also wechselt man in $P_3\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$ von einer Rechtskurve in eine Linkskurve.

$6 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 4 \cdot x \rightarrow f(x)$	<i>Fertig</i>
$\int_0^1 f(x) \, dx$	$\frac{1}{2}$

$\frac{d}{dx}(f(x))$	$18 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 4$
$\text{solve}(18 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 4 = 0, x)$	$x = \frac{1}{3} \text{ or } x = \frac{2}{3}$
$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{5}{9}$
$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{4}{9}$

$\frac{d}{dx}(18 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 4)$	$36 \cdot x - 18$
$\text{solve}(36 \cdot x - 18 = 0, x)$	$x = \frac{1}{2}$
$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$

b) Bestimmen des Flächeninhaltes:

Zu ermitteln ist zunächst die Schnittstelle der Geraden mit dem Graphen von f.

$$f(x) = 0,6 \Leftrightarrow 6x^3 - 9x^2 + 4x = 0,6$$

$$\Leftrightarrow x = 0,8600\dots$$

CAS

Für die Maßzahl der Fläche folgt dann:

$$A = 0,4 \cdot 1 - \int_{0,8600\dots}^1 (f(x) - 0,6) dx$$

$$= 0,4 - 0,0244\dots$$

CAS

$$= 0,3755\dots$$

solve(f(x)=0,6,x)	x=0.860035
$\int_{0.860035}^1 (f(x)-0.6)dx$	0.024456
0.4-0.024455761117317	0.375544

Die Fläche für die rotblühenden Blumen ist etwa 0,38 m² groß.

Untersuchen, ob der Wegpunkt W nass wird:

B(0,6|0,7) und W(0,5|0,5)

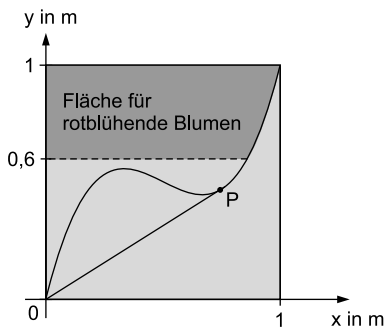
W wird genau dann nass, wenn er innerhalb des Kreises um B mit Radius 0,25 m liegt. Dies ist der Fall, wenn die Strecke \overline{BW} nicht mehr als 0,25 m lang ist.

Für die Länge der Strecke ergibt sich:

$$|\overline{BW}| = \sqrt{(0,6 - 0,5)^2 + (0,7 - 0,5)^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,05} = 0,2236\dots < 0,25$$

W liegt also innerhalb des Kreises um B und wird somit nass.

Skizzieren des geradlinigen Weges:



Ermitteln der Koordinaten des Anschlusspunktes:

Die Gerade w ist gegeben durch:

$$w(x) = m \cdot x \text{ mit } m > 0$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK